SⅡ β（ベータ）

平成23年11月11日実施

神奈川県高等学校教科研究会数学部会編

数　学　学　力　テ　ス　ト

（時間50分）

第　　学年　　組　　番	氏名	

注意事項

1. 開始の合図があるまで，この問題冊子を開いてはいけません。
2. 解答用紙はこの冊子にはさんであります。
3. 計算はあいているところを使い，答えはすべて解答用紙の決められた欄に書き入れなさい。
4. 選択問題については，[β－1]から[β－9]までの9群のうちから，学校で指定された2群を解答しなさい。

解答上の注意事項

- 答えに根号が含まれるときは，根号の中は最も小さい自然数にしなさい。
- 答えが分数になるとき，約分できる場合は約分しておきなさい。

S Ⅱ β 学力テスト

β 共通問題　次の問いに答えよ。（ここで使用している i は虚数単位とする）

(1) $\dfrac{1+2i}{1-i}$ を計算せよ。

(2) 方程式 $x^3-x^2-14x+24=0$ を解け。

(3) 整式 $2x^2-5x+4$ を整式 B で割ると，商が $x-1$，余りが 1 であるという。整式 B を求めよ。

(4) 円 $x^2+y^2=3$ と直線 $y=mx-3$ が接するとき，定数 m の値を求めよ。

(5) 2 点 A$(-1\ ,\ 3)$，B$(7\ ,\ -1)$ を結ぶ線分 AB の垂直二等分線の方程式を求めよ。

(6) 次の等式が x についての恒等式であるとき，定数 a , b , c の値を求めよ。

$$2x^2+1=a(x-1)^2+b(x-1)+c$$

(7) 2 次方程式 $x^2-2(m-2)x-m+8=0$ が異なる 2 つの正の解をもつとき，定数 m の値の範囲を求めよ。（途中経過を書け）

(8) 定点 A$(-3\ ,\ 0)$ と円 $x^2+y^2=1$ 上の点 Q$(s\ ,\ t)$ について，線分 AQ を 1 : 2 に内分する点を P$(x\ ,\ y)$ とするとき，次の問いに答えよ。

(ア) x , y を s , t を用いてそれぞれ表せ。

(イ) 点 Q がこの円周上を動くとき，点 P の軌跡の方程式を求めよ。
（途中経過を書け）

β 選択問題

[β－1] から [β－9] までの9群のうち，学校で指定された2群を解答すること。

[β－1] 三角関数

(1) $\sin\theta-\cos\theta=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$ のとき，$\sin\theta\cos\theta$ の値を求めよ。

(2) θ が第4象限の角で，$\cos\theta=\dfrac{1}{4}$ のとき，$\sin\theta$ の値を求めよ。

(3) $0\leqq\theta<2\pi$ のとき，不等式 $(\sin\theta+3)(2\sin\theta-\sqrt{3})\geqq 0$ を解け。

(4) $\sin(-15°)$ の値を求めよ。

(5) $0\leqq\theta<2\pi$ のとき，関数 $y=\cos 2\theta+2\cos\theta$ の最小値を求めよ。

[β－2] 指数関数・対数関数

(1) $2\log_2 6-\log_2 9$ を計算せよ。

(2) $\sqrt[4]{a^3}\div\sqrt[3]{a}\div\sqrt[6]{a}$ を計算せよ。ただし，$a>0$ とする。

(3) 地球と太陽の距離を 1.5×10^{11} m とし，光の進む速さを毎秒 3.0×10^{8} m とする。光が太陽から地球まで到達するには何分何秒かかるか。

(4) 9^{20} は何桁(けた)の整数か求めよ。ただし，$\log_{10}3=0.4771$ とする。

(5) 不等式 $2\log_{0.2}(x-2)>\log_{0.2}(x+4)$ を解け。

[$\beta-3$] 微分・積分の考え

(1) 次の条件を満たす関数 $F(x)$ を求めよ。

$F'(x)=3(x+1)(x-2)$, $F(0)=1$

(2) 2つの放物線 $y=x^2-4x$, $y=-x^2+6$ で囲まれる部分の面積を求めよ。

(3) 関数 $y=-x^3+12x$ $(-3\leqq x\leqq 3)$ の最小値を求めよ。

(4) 方程式 $x^3-3x^2=a$ がただ1つの実数解をもつとき，定数 a の値の範囲を求めよ。

(5) 関数 $f(x)=x^3-kx^2+2x-3$ が極値をもたないように，定数 k の値の範囲を定めよ。

[$\beta-4$] 式と証明・高次方程式 （ここで使用している i は虚数単位とする）

(1) $\dfrac{x+8}{x^2+x-2}-\dfrac{x+5}{x^2-1}$ を計算せよ。

(2) 2次方程式 $x^2+ax+b=0$ の解の1つが $2+i$ のとき，実数 a , b の値を求めよ。

(3) 整式 $P(x)=x^3+2x^2+kx-3$ を $x+1$ で割った余りが2であるとき，定数 k の値を求めよ。

(4) $\dfrac{1}{1-\dfrac{1}{1-\dfrac{1}{1-x}}}$ を計算して簡単にせよ。

(5) 方程式 $8x^3+1=0$ の虚数解の1つを a とするとき，$4a^2-2a+3$ の値を求めよ。

[β－5] 図形と方程式 (軌跡と領域を除く)

(1) 点 $(3\ ,\ -2)$ に関して，点 $P(-1\ ,\ 4)$ と対称な点 Q の座標を求めよ。

(2) 円 $x^2+y^2-4x+6y-3=0$ の中心の座標と半径を求めよ。

(3) 2 直線 $x+2y-5=0$, $2x-3y+4=0$ の交点を通り，直線 $3x-4y+1=0$ に垂直な直線の方程式を求めよ。

(4) 円 $x^2+y^2=4$ と直線 $x+3y+k=0$ が異なる 2 点で交わるとき，定数 k の値の範囲を求めよ。

(5) 点 $A(2\ ,\ -4)$ から円 $x^2+y^2=10$ に引いた接線の方程式を求めよ。

[β－6] 三角関数 (加法定理を除く)

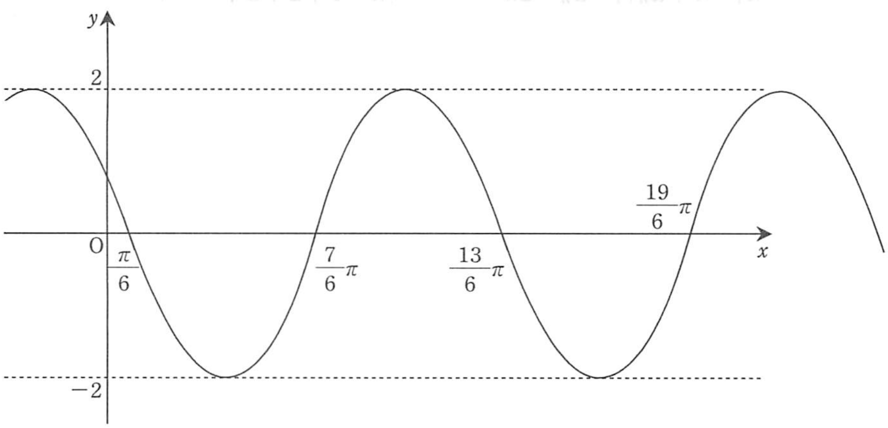
(1) 半径 6，中心角 $\frac{7}{6}\pi$ である扇形の弧の長さを求めよ。

(2) $0\leqq\theta<2\pi$ のとき，方程式 $\cos\theta(\cos\theta-1)=0$ を解け。

(3) $0\leqq\theta\leqq\pi$ のとき，不等式 $\tan\theta>1$ を解け。

(4) $\dfrac{\sin\theta}{1+\cos\theta}+\dfrac{1}{\tan\theta}$ を簡単にせよ。

(5) 下の図は関数 $y=a\cos(x-b)$ のグラフである。このとき，定数 a , b の値を求めよ。ただし，$a>0$, $-\pi\leqq b<\pi$ とする。



[β − 7] 指数関数・対数関数 （対数関数を除く）

(1) $\sqrt{27} \times \sqrt[3]{9} \div \sqrt[6]{3}$ を計算せよ。

(2) 次の 3 つの数を小さい順に左から並べよ。

$\sqrt[3]{32}$, $\sqrt[4]{64}$, $\sqrt[6]{128}$

(3) 方程式 $27^{x}=3^{1-x}$ を解け。

(4) 不等式 $4^{x}-2^{x+1}>8$ を解け。

(5) $x^{\frac{1}{3}}-x^{-\frac{1}{3}}=2$ のとき, $x-x^{-1}$ の値を求めよ。

[β − 8] 数　　　列

(1) 初項 10, 公差 −3 の等差数列 $\{a_n\}$ について, −53 は第何項か。

(2) 第 3 項が 12, 第 6 項が 96 である等比数列 $\{a_n\}$ の初項から第 5 項までの和を求めよ。

(3) 和 $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} k(k+3)$ を求めよ。

(4) 初項から第 n 項までの和 S_n が, $S_n=n^2-n$ で表される数列 $\{a_n\}$ の一般項を求めよ。

(5) 次の条件によって定まる数列 $\{a_n\}$ の一般項を求めよ。

$a_1=4$, $a_{n+1}-a_n=2n$ 　　　　$(n=1, 2, 3, \cdots\cdots)$

[β－9] ベクトル

(1) 2つのベクトル $\vec{a}=(3\ ,\ 5)$, $\vec{b}=(x\ ,\ -6)$ が垂直になるとき，定数 x の値を求めよ。

(2) 2つのベクトル $\vec{a}=(2\ ,\ 4)$, $\vec{b}=(-1\ ,\ 1)$ がある。$\left|\vec{a}+t\vec{b}\right|$ の最小値とそのときの実数 t の値を求めよ。

(3) $\left|\vec{a}\right|=3$, $\left|\vec{b}\right|=\sqrt{2}$, $\left|2\vec{a}-3\vec{b}\right|=\sqrt{30}$ のとき，内積 $\vec{a}\cdot\vec{b}$ の値を求めよ。

(4) 2つのベクトル $\vec{a}=(-1\ ,\ 0\ ,\ 1)$, $\vec{b}=(0\ ,\ 1\ ,\ 1)$ の両方に垂直で，大きさが $\sqrt{3}$ のベクトルを求めよ。

(5) 平行四辺形 OABC において，辺 OA の中点を D，辺 OC の中点を E とし，線分 AE と線分 BD の交点を P とする。$\overrightarrow{OA}=\vec{a}$, $\overrightarrow{OC}=\vec{c}$ とするとき，$\overrightarrow{OP}$ を $\vec{a}$, $\vec{c}$ を用いて表せ。