SⅡ β（ベータ）

平成 22 年 11 月 12 日実施

神奈川県高等学校教科研究会数学部会編

数　学　学　力　テ　ス　ト

（時間50分）

第　　学年　　組　　番	氏名	

注　意　事　項

1. 開始の合図があるまで，この問題冊子を開いてはいけません。
2. 解答用紙はこの冊子にはさんであります。
3. 計算はあいているところを使い，答えはすべて解答用紙の決められた欄に書き入れなさい。
4. 選択問題については，[β－1]から[β－9]までの9群のうちから，学校で指定された2群を解答しなさい。

解答上の注意事項

・答えに根号が含まれるときは，根号の中は最も小さい自然数にしなさい。

・答えが分数になるとき，約分できる場合は約分しておきなさい。

S Ⅱ β 学 力 テ ス ト

β 共通問題　次の問いに答えよ。(ここで使用している i は虚数単位とする)

(1) $x=1-\sqrt{5}\,i$ のとき，x^2-2x の値を求めよ。

(2) 等式 $\dfrac{3x+19}{x^2+x-6}=\dfrac{a}{x-2}-\dfrac{b}{x+3}$ が x についての恒等式であるとき，定数 a，b の値を求めよ。

(3) 複素数 $\dfrac{2-ai}{1+i}$ が実数になるとき，実数 a の値を求めよ。

(4) 直線 $y=4x-11$ に垂直で，点 $(8,-1)$ を通る直線の方程式を求めよ。

(5) 2直線 $2x+y-4=0$，$x-2y+3=0$ の交点と，点 $(2,-1)$ を通る直線の方程式を求めよ。

(6) 2点 $(3,-2)$，$(-7,2)$ を直径の両端とする円の方程式を求めよ。

(7) 円 $x^2+y^2=4$ と直線 $2x-y+a=0$ が共有点をもたないとき，定数 a の値の範囲を求めよ。(途中経過を書け)

(8) 2次方程式 $3x^2-2x+1=0$ の2つの解を α，β とするとき，次の問いに答えよ。

(ア) $\alpha+\beta$，$\alpha\beta$ の値を求めよ。

(イ) $\dfrac{1}{\alpha}$，$\dfrac{1}{\beta}$ を解にもつ2次方程式が $x^2+px+q=0$ になるという。このとき，定数 p，q の値を求めよ。(途中経過を書け)

β 選択問題　[β－1] から [β－9] までの9群のうち，学校で指定された2群を解答すること。

[β－1] 三角関数

(1) $\sin\theta+\cos\theta=-\dfrac{\sqrt{3}}{2}$ のとき，$\sin\theta\cos\theta$ の値を求めよ。

(2) $0\leqq\theta<2\pi$ のとき，方程式 $\sqrt{3}\tan\theta-1=0$ を解け。

(3) $0\leqq\theta<2\pi$ のとき，不等式 $2\cos\theta+\sqrt{2}\leqq 0$ を解け。

(4) α が第1象限の角，β が第2象限の角で，$\sin\alpha=\dfrac{1}{5}$，$\cos\beta=-\dfrac{2}{3}$ のとき，$\sin(\alpha-\beta)$ の値を求めよ。

(5) $0\leqq\theta<2\pi$ のとき関数 $y=\cos 2\theta+2\sin\theta$ の最小値を求めよ。また，そのときの θ の値を求めよ。

[β－2] 指数関数・対数関数

(1) $\sqrt[3]{a}\times\sqrt{a}\div\sqrt[3]{a^2}$ を計算せよ。ただし，$a>0$ とする。

(2) 方程式 $2^{2x}+4\cdot 2^x-5=0$ を解け。

(3) $\dfrac{1}{2}\log_3 12-\log_3 2$ を計算せよ。

(4) 不等式 $\log_{\frac{1}{2}}(2x+3)<2\log_{\frac{1}{2}}x$ を解け。

(5) 関数 $y=(\log_2 x)^2+\log_2 x^8+2$ の最小値を求めよ。また，そのときの x の値を求めよ。

［$\beta-3$］ 微分・積分の考え

(1) 関数 $f(x)=-x^2+4x$ において，x の値が 1 から 5 まで変化するとき，平均変化率を求めよ。

(2) 曲線 $y=-x^3+5x$ 上の点 $(1,4)$ における接線の方程式を求めよ。

(3) $\int_{-2}^{1}(x^2+x+3)dx+\int_{1}^{2}(x^2+x+3)dx$ を計算せよ。

(4) 放物線 $y=x^2-3x$ と x 軸とで囲まれた部分の面積を求めよ。

(5) 次の条件を満たす 2 次関数 $f(x)$ を求めよ。
$f(1)=6$, $f'(1)=3$, $f'(0)=-1$

［$\beta-4$］ 式と証明・高次方程式 （ここで使用している i は虚数単位とする）

(1) $\dfrac{1}{x^2+2x}+\dfrac{1}{x^2+6x+8}$ を計算せよ。

(2) 整式 x^3-2x^2-4 をある整式 B で割ると商が $x-3$，余りが $2x-1$ であった。このとき，整式 B を求めよ。

(3) $\dfrac{a}{2}=\dfrac{b}{3}=\dfrac{c}{4}\neq 0$ のとき，$\dfrac{(a+b)(b+c)(c+a)}{abc}$ の値を求めよ。

(4) $\left(\dfrac{2}{i}+i\right)^2\left(\dfrac{1}{i}-i\right)^2$ を計算せよ。

(5) 方程式 $3x^3+x^2-8x+4=0$ を解け。

[β－5] 図形と方程式 (軌跡と領域を除く)

(1) 4 点 A$(-2, 3)$, B$(-4, -2)$, C$(3, -1)$, D を頂点とする平行四辺形 ABCD がある。頂点 D の座標を求めよ。

(2) 2 直線 $6x+2y+3=0$, $(m-2)x-y+5=0$ が平行となるとき，定数 m の値を求めよ。

(3) 3 点 A$(-5, 0)$, B$(-3, 7)$, C を頂点とする △ABC の重心の座標が $(-2, 3)$ であるとき，頂点 C の座標を求めよ。

(4) 円 $x^2+y^2-6x+2y+9=0$ の中心の座標と半径を求めよ。

(5) 2 点 A$(2, 0)$, B$(4, 4)$ から等距離にあり，直線 $2x-y+1=0$ 上にある点 P の座標を求めよ。

[β－6] 三角関数 (加法定理を除く)

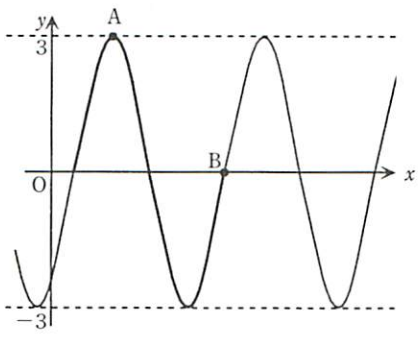
(1) 半径 6，中心角 $\dfrac{\pi}{6}$ である扇形の面積を求めよ。

(2) $0 \leqq \theta < 2\pi$ のとき，方程式 $1+\sin\theta-2\cos^2\theta=0$ を解け。

(3) $\tan\theta=3$ のとき，$\dfrac{\sin\theta}{\cos\theta+\sin\theta}$ の値を求めよ。

(4) $\pi<\theta<2\pi$ で $\cos\theta=-\dfrac{2}{3}$ のときの，$\tan\theta$ の値を求めよ。

(5) 下の図は関数 $y=3\sin\left(x-\dfrac{\pi}{6}\right)$ のグラフの一部である。点 A と点 B の座標の組合せで正しいものを下の(ア)～(エ)の中から 1 つ選び，記号で答えよ。



(ア) A$\left(\dfrac{\pi}{3}, 3\right)$, B$\left(\dfrac{11}{6}\pi, 0\right)$

(イ) A$\left(\dfrac{2}{3}\pi, 3\right)$, B$\left(\dfrac{11}{6}\pi, 0\right)$

(ウ) A$\left(\dfrac{2}{3}\pi, 3\right)$, B$\left(\dfrac{13}{6}\pi, 0\right)$

(エ) A$\left(\dfrac{\pi}{3}, 3\right)$, B$\left(\dfrac{13}{6}\pi, 0\right)$

［β－7］ 指数関数・対数関数 （対数関数を除く）

(1) $8^5\times32^{-4}\div2^{-6}$ を計算せよ。

(2) 方程式 $5^{3x}=\dfrac{\sqrt{5}}{25}$ を解け。

(3) 関数 $y=3^{2x}-6\cdot3^x+5$ の最小値を求めよ。また，そのときの x の値を求めよ。

(4) 次の３つの数の大小を調べ，小さい順に左から並べよ。

$\sqrt[5]{8}$, $\sqrt[10]{16}$, $\sqrt[8]{64}$

(5) $3^x-3^{-x}=2$ のとき 3^x+3^{-x} の値を求めよ。

［β－8］ 数　　列

(1) -2 , 10 , -50 , … で表される等比数列 $\{a_n\}$ の一般項を求めよ。

(2) 等差数列をなす３つの数がある。その和は３で，積は -15 であるとき，この等差数列の公差 d の値を求めよ。

(3) １から 200 までの自然数のうち，６の倍数の和を求めよ。

(4) 数列 $\dfrac{1}{2\cdot1}$, $\dfrac{1}{2(1+2)}$, $\dfrac{1}{2(1+2+3)}$, … , $\dfrac{1}{2(1+2+3+\cdots+n)}$ の初項から第 n 項までの和を求めよ。

(5) $a_1=-1$，$a_{n+1}=3a_n-8$ $(n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$ で定義されている数列 $\{a_n\}$ の一般項を求めよ。

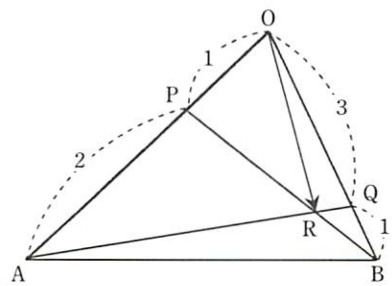
[β－9] ベクトル

(1) 2つのベクトル $\vec{a}=(-4,3)$，$\vec{b}=(3,p)$ について $\vec{a}+\vec{b}$ と $\vec{a}-\vec{b}$ が垂直になるように定数 p の値を定めよ。

(2) 2つのベクトル $\vec{a}=\left(\sqrt{3},5,2\right)$，$\vec{b}=\left(3,\sqrt{3},0\right)$ のなす角 θ を求めよ。ただし，$0^\circ \leqq \theta \leqq 180^\circ$ とする。

(3) 3つのベクトル $\vec{a}=(2,1)$，$\vec{b}=(7,-5)$，$\vec{c}=(1,t)$ について $\left|\vec{a}-\vec{b}\right|=\left|\vec{b}-\vec{c}\right|$ が成り立つとき，定数 t の値を求めよ。

(4) △OAB において，辺 OA を 1 : 2 に内分する点を P，辺 OB を 3 : 1 に内分する点を Q，また，線分 AQ と BP の交点を R とする。$\overrightarrow{OA}=\vec{a}$，$\overrightarrow{OB}=\vec{b}$ とするとき $\overrightarrow{OR}$ を $\vec{a}$，$\vec{b}$ を用いて表せ。



(5) △ABC と同一平面上に点 P があり，$6\overrightarrow{PA}+3\overrightarrow{PB}+2\overrightarrow{PC}=\vec{0}$ を満たす。このとき，△PAB，△PBC，△PCA の面積比を最も簡単な整数比で表せ。