SⅡβ（ベータ）

平成21年11月13日実施

神奈川県高等学校教科研究会数学部会編

数　学　学　力　テ　ス　ト

（時間50分）

第　　学年　　組　　番	氏名	

注　意　事　項

1. 開始の合図があるまで，この問題冊子を開いてはいけません。
2. 解答用紙はこの冊子にはさんであります。
3. 計算はあいているところを使い，答えはすべて解答用紙の決められた欄に書き入れなさい。
4. 選択問題については，[β―1]から[β―9]までの9群のうちから，学校で指定された2群を解答しなさい。

解答上の注意事項

・答えに根号が含まれるときは，根号の中は最も小さい自然数にしなさい。

・答えが分数になるとき，約分できる場合は約分しておきなさい。

S Ⅱ β 学 力 テ ス ト

β 共通問題　次の問いに答えよ。（ここで使用している i は虚数単位とする）

(1) 整式 $P(x)=x^3+ax^2-x+6$ を $x-2$ で割ったときの余りが 4 となるように定数 a の値を定めよ。

(2) 等式 $(2-3i)(a+bi)=12-5i$ を満たす実数 a, b の値を求めよ。

(3) 2 次方程式 $x^2-4x+1=0$ の 2 つの解を α, β とするとき，$\dfrac{1}{\alpha+1}+\dfrac{1}{\beta+1}$ の値を求めよ。

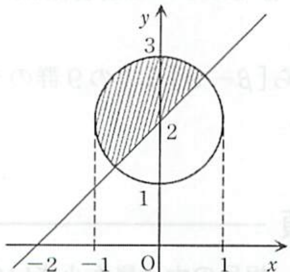
(4) 2 点 A(0, 3), B(6, 0) を結ぶ線分 AB を 1 : 2 の比に内分する点を通り，線分 AB に垂直な直線の方程式を求めよ。

(5) 円 $x^2+y^2-8x+6y=0$ の中心の座標と半径を求めよ。

(6) 下図の斜線で示した領域を連立不等式で表すと $\begin{cases} y \geqq x+2 \\ \boxed{} \end{cases}$ となる。

$\boxed{}$ にあてはまる不等式を求めよ。

ただし，この領域の境界線を含むものとする。



(7) 2 定点 A(0, 1), B(0, −2) がある。AP : BP = 1 : 2 を満たす点 P の軌跡の方程式を求めよ。（途中経過を書け）

(8) $x=1-2i$ のとき，次の各問いに答えよ。

(ア) x^2-2x+5 の値を求めよ。

(イ) x^3-2x^2+6x+2 の値を求めよ。（途中経過を書け）

β 選択問題　[β−1] から [β−9] までの9群のうち，学校で指定された2群を解答すること。

[β—1] 三角関数

(1) $0 \leqq \theta < 2\pi$ のとき，方程式 $\cos\theta = \dfrac{1}{2}$ を解け。

(2) θ が第3象限の角で，$\tan\theta = \sqrt{15}$ のとき，$\cos\theta$ の値を求めよ。

(3) 関数 $y = \sin x + 3\cos x$ の最大値を求めよ。

(4) $0 \leqq \theta < \pi$ のとき，方程式 $\sin 2\theta = \sqrt{3}\cos\theta$ を解け。

(5) $\sin\alpha + \cos\beta = 0$，$\cos\alpha + \sin\beta = \sqrt{3}$ のとき，$\sin(\alpha+\beta)$ の値を求めよ。

[β—2] 指数関数・対数関数

(1) $\sqrt{a} \div \sqrt[3]{a} \div \sqrt[6]{a}$ を計算せよ。ただし，$a > 0$ とする。

(2) 不等式 $\left(\dfrac{1}{5}\right)^{2x+1} > \dfrac{1}{25}$ を解け。

(3) $\log_{10}150$ の値を求めよ。ただし，$\log_{10}2 = 0.3010$，$\log_{10}3 = 0.4771$ とする。

(4) $\left(\log_4 3 + \log_8 \sqrt{3}\right) \cdot \log_3 2$ を計算せよ。

(5) 方程式 $\log_2(x+1) + \log_2(x-2) = 2$ を解け。

[β―3] 微分・積分の考え

(1) 関数 $f(x)=ax^3-x^2+2ax+3$ において，$f'(2)=3$ となるとき，定数 a の値を求めよ。

(2) 放物線 $y=x^2-x-3$ 上の点 $(2,\ -1)$ における接線の方程式を求めよ。

(3) 2つの放物線 $y=x^2-2x$，$y=-x^2+4x$ とで囲まれる部分の面積を求めよ。

(4) 等式 $\int_1^x f(t)dt=4x^2-3x+a$ を満たす関数 $f(x)$ と定数 a の値を求めよ。

(5) 3次方程式 $2x^3-3x^2-12x-a=0$ が異なる3個の実数解をもつとき，定数 a の値の範囲を求めよ。

[β―4] 式と証明・高次方程式 （この選択群で使用している i は虚数単位とする）

(1) 整式 $2x^3+x^2-8x+5$ をある整式 B で割ったときの商が $2x-1$，余りが $x+1$ である。このとき，整式 B を求めよ。

(2) $\dfrac{x}{3x-9}-\dfrac{1}{x-3}$ を計算せよ。

(3) $(1+i)^2-(1+i)^4$ を計算せよ。

(4) 方程式 $x^4+3x^2-4=0$ を解け。

(5) $x=\dfrac{y}{2}=\dfrac{z}{3}\fallingdotseq 0$ のとき，$\dfrac{y+z}{x}+\dfrac{z+x}{y}+\dfrac{x+y}{z}$ の値を求めよ。

[β―5] 図形と方程式 (軌跡と領域を除く)

(1) 3 点 A(2, −6), B(0, 4), C(4, −1) を頂点とする △ABC の重心の座標を求めよ。

(2) 2 点 P(1, 2), Q(0, a) がある。2 点間の距離 PQ が 4 となるとき，定数 a の値を求めよ。

(3) 点 (2, 4) を通り，x 軸と y 軸の両方に接する円の半径を求めよ。

(4) 円 $x^2+y^2=6$ と直線 $y=x+2$ の 2 つの交点を結ぶ線分の長さを求めよ。

(5) 直線 $2x+y=9$ に関して，点 A(5, 4) と対称な点 B の座標を求めよ。

[β―6] 三角関数 (加法定理を除く)

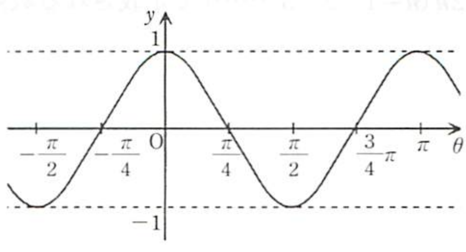
(1) $\sin\frac{7}{6}\pi+\cos\frac{7}{6}\pi\cdot\tan\frac{7}{6}\pi$ の値を求めよ。

(2) $0\leqq\theta<2\pi$ のとき，方程式 $\cos3\theta=0$ の解の個数を求めよ。

(3) $0\leqq\theta<2\pi$ のとき，不等式 $2\sin\theta\geqq1$ を解け。

(4) $-\frac{\pi}{3}\leqq\theta\leqq\frac{\pi}{4}$ のとき，関数 $y=\tan\theta$ の最小値を求めよ。

(5) 下図は関数 $y=\sin a(\theta+b)$ のグラフの一部である。定数 a, b の値を求めよ。
ただし，$a>0$, $-\frac{\pi}{2}\leqq b\leqq\frac{\pi}{2}$ とする。



[β—7] 指数関数・対数関数 (対数関数を除く)

(1) $\left\{(0.25)^{\frac{3}{4}}\right\}^{-\frac{2}{3}}$ を計算せよ。

(2) 関数 $y=\left(\dfrac{1}{2}\right)^x$ において，$-1 \leqq x \leqq \dfrac{1}{2}$ のとき，$a \leqq y \leqq b$ である。a，b の値を求めよ。

(3) 方程式 $2^{3x+1}=8\sqrt{2}$ を解け。

(4) 次の３つの数の大小を調べ，小さい順に左から並べよ。

$$\sqrt[5]{9}\ ,\quad \sqrt[3]{3}\ ,\quad \sqrt[7]{27}$$

(5) $x^{\frac{1}{3}}+x^{-\frac{1}{3}}=3$ のとき，$x+x^{-1}$ の値を求めよ。

[β—8] 数　　　列

(1) 初項 -2，公差 5 の等差数列において，83 は第何項か。

(2) 等比数列 $\{a_n\}$ が，$a_1+a_3=15$，$a_2+a_4=30$ を満たすとき，一般項を求めよ。

(3) 初項から第 n 項までの和 S_n が $S_n=2n^2-3n$ で表されるような数列 $\{a_n\}$ の一般項を求めよ。

(4) $\displaystyle\sum_{k=1}^{15}\frac{1}{\sqrt{k+1}+\sqrt{k}}$ を求めよ。

(5) $a_1=1$，$a_{n+1}=a_n+2n$ $(n=1,\ 2,\ 3,\cdots\cdots)$ で定義される数列 $\{a_n\}$ の一般項を求めよ。

[β—9] ベクトル

(1) 2つのベクトル $\overrightarrow{a}=(-3,\ 2)$, $\overrightarrow{b}=(1,\ k)$ について, $\overrightarrow{a}+\overrightarrow{b}$ と $\overrightarrow{a}-\overrightarrow{b}$ が平行になるように定数 k の値を定めよ。

(2) $|\overrightarrow{a}|=\sqrt{2}$, $|\overrightarrow{b}|=\sqrt{3}$, $|\overrightarrow{a}+\overrightarrow{b}|=3$ であるとき, 内積 $\overrightarrow{a}\cdot\overrightarrow{b}$ の値を求めよ。

(3) 2つのベクトル $\overrightarrow{a}=(-2,\ 1,\ 1)$, $\overrightarrow{b}=(1,\ 1,\ -2)$ のなす角 θ を求めよ。
ただし, $0^\circ \leqq \theta \leqq 180^\circ$ とする。

(4) 2つのベクトル $\overrightarrow{a}=(0,\ -3)$, $\overrightarrow{b}=(-1,\ 1)$ において, $|\overrightarrow{a}+t\overrightarrow{b}|$ を最小にする実数 t の値を求めよ。

(5) $\triangle$OAB と点 P があり, 等式 $3\overrightarrow{\mathrm{OP}}+2\overrightarrow{\mathrm{AP}}+\overrightarrow{\mathrm{BP}}=\overrightarrow{0}$ が成り立つとき, $\triangle$OAP と $\triangle$OAB の面積比を最も簡単な整数比で表せ。