

平成19年4月12日実施

神奈川県高等学校教科研究会数学部会編

数 学 学 力 テ ス ト

(時間50分)

(無断転載を禁じます)

第	学年	組	番	氏 名	
---	----	---	---	--------	--

注 意 事 項

- 問題用紙と解答用紙はこの冊子にはさんであります。
- SII α または SII β のうち、学校で指定されたいずれか一方を解答して下さい。
 - SII α は、1 ページ～5 ページに印刷してあります。
[$\alpha - 1$] から [$\alpha - 11$] までの11群のうちから、学校で指定された4群を解答して下さい。
 - SII β は、6 ページ～10 ページに印刷してあります。
[β 共通問題] を解答し、さらに [$\beta - 1$] から [$\beta - 7$] までの7群のうちから、学校で指定された2群を解答して下さい。
※ [β 共通問題] の (9)-(f)、(10)-(f) は途中経過を書く問題です。
- 解答はすべて SII α 、SII β 専用の解答用紙に記入して下さい。
なお、SII β を解答する場合は、指定された2群の番号を、下欄および解答用紙の選択番号欄に番号順に記入して下さい。
(SII β の選択番号 →) $\beta - \square$, $\beta - \square$
- 解答用紙の記入する欄を間違えないように注意して下さい。

S II α 学 力 テ ス ト

[$\alpha - 1$] 式と証明・高次方程式 (この選択群で使用している i は虚数単位とする)

- (1) $\frac{x+3}{x^2+7x+12}$ を簡単にせよ。
- (2) $(3+4i)(3-4i)$ を計算せよ。
- (3) 2次方程式 $x^2+2x-4=0$ の2つの解を α, β とするとき、 $(\alpha+1)(\beta+1)$ の値を求めよ。
- (4) 整式 $P(x) = x^3+2x^2+3x+5$ を、整式 $x+1$ で割ったときの余りを求めよ。
- (5) 方程式 $x^4 = 16$ を解け。

[$\alpha - 2$] 図形と方程式

- (1) 2点 $A(1, 3), B(6, 2)$ 間の距離 AB を求めよ。
- (2) 2点 $A(2, 2), B(8, -1)$ を結ぶ線分 AB を $2:1$ の比に内分する点の座標を求めよ。
- (3) 点 $(-2, 3)$ を通り、傾き 3 の直線の方程式を求めよ。
- (4) 円 $x^2+y^2-8x+6y+21=0$ の中心の座標と半径を求めよ。
- (5) 円 $x^2+y^2=5$ と直線 $y=2x+5$ の接点の座標を求めよ。

[$\alpha - 3$] 三角関数

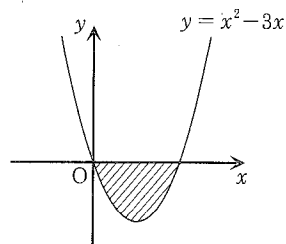
- (1) 225° を弧度法で表せ。
- (2) $\cos \frac{13\pi}{6}$ の値を求めよ。
- (3) $0 \leq \theta < 2\pi$ のとき、方程式 $\cos \theta = -\frac{1}{2}$ を解け。
- (4) 加法定理を用いて、 $\sin(x+60^\circ)$ を変形したところ、
 $\sin(x+60^\circ) = \frac{\text{ア}}{2} \sin x + \frac{\text{イ}}{2} \cos x$ となった。ア、イ にあてはまる数を入れなさい。
- (5) 関数 $y = \sin \theta$ と同じグラフになる関数を、次のア～エから1つ選び記号で答えよ。
ア $y = \cos\left(\theta + \frac{\pi}{2}\right)$ イ $y = \sin\left(\theta + \frac{\pi}{2}\right)$
ウ $y = \cos\left(\theta - \frac{\pi}{2}\right)$ エ $y = \sin\left(\theta - \frac{\pi}{2}\right)$

[α-4] 指数関数・対数関数

- (1) $5^{-\frac{1}{2}} \times 5^{\frac{5}{2}}$ を計算せよ。
- (2) $\sqrt[4]{2} \times \sqrt[4]{8}$ を計算せよ。
- (3) $\log_4 28 - \log_4 7$ を計算せよ。
- (4) 方程式 $9 \times 3^x = \frac{1}{9}$ を解け。
- (5) 方程式 $\log_2(x-4) = 2$ を解け。

[α-5] 微分・積分の考え

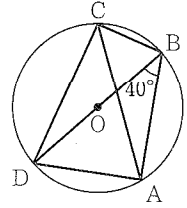
- (1) 関数 $y = x^3 - 2x^2 + 4x - 1$ を微分せよ。
- (2) 放物線 $y = -x^2 + 3x$ 上の x 座標が -1 である点における接線の傾きを求めよ。
- (3) 関数 $f(x) = x^3 + 6x^2 + 9x + 5$ の極小値を求めよ。
- (4) 不定積分 $\int (x+3)^2 dx$ を求めよ。ただし、積分定数を C とする。
- (5) 放物線 $y = x^2 - 3x$ と x 軸で囲まれた部分の面積を求めよ。



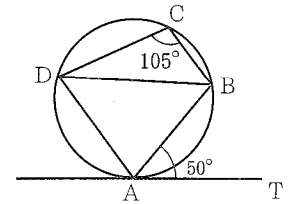
[α-6] 平面図形

- (1) $\triangle ABC$ において、 $AB=4$ 、 $BC=5$ 、 $CA=7$ のとき、
 $\angle A$ 、 $\angle B$ 、 $\angle C$ を小さい方から順に並べよ。

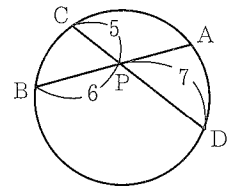
- (2) 右図のように、 BD を直径とする円 O に内接する
 四角形 $ABCD$ がある。
 $\angle ABD = 40^\circ$ のとき、 $\angle ACB$ の大きさを求めよ。



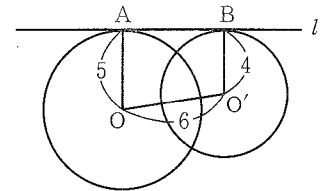
- (3) 右図のように、円に内接する四角形 $ABCD$ がある。
 また、直線 AT は、点 A でこの円に接している。
 $\angle BAT = 50^\circ$ 、 $\angle BCD = 105^\circ$ のとき、 $\angle ABD$ の
 大きさを求めよ。



- (4) 右図のように、円の 2 つの弦 AB 、 CD が円の内部の点 P で
 交わっている。 $BP=6$ 、 $CP=5$ 、 $DP=7$ のとき、 AP の長さ
 を求めよ。



- (5) 右図において、直線 l は 2 つの円 O 、 O' の共通接線で、
 点 A 、 B は接点である。 $OO'=6$ 、 $OA=5$ 、 $O'B=4$
 のとき、線分 AB の長さを求めよ。

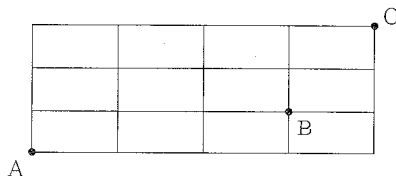


[$\alpha-7$] 集合と論理

- (1) 50以下の自然数のうち、4の倍数の個数を求めよ。
- (2) 全体集合を $U = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$ とし、その部分集合を $A = \{1, 2, 5, 7\}$, $B = \{3, 5, 8\}$ とする。集合 $\overline{A \cap B}$ を要素を書き並べる方法で表せ。
ただし、 \overline{A} は集合 A の補集合である。
- (3) 次の(ア)～(エ)の命題のうち、真であるものをすべて選び、記号で答えよ。
ただし、 a, b, c, x は実数とする。
(ア) 2の倍数は、4の倍数である。
(イ) $x=1$ ならば、 $x^2-4x+3=0$ である。
(ウ) $ac=bc$ ならば、 $a=b$ である。
(エ) $x < 3$ ならば、 $x < 4$ である。
- (4) 次の に適するものを(ア)～(エ)の中から1つ選び、記号で答えよ。
「四角形 ABCD がひし形であることは、四角形 ABCD が正方形であるための 。」
(ア) 必要条件であるが、十分条件でない
(イ) 十分条件であるが、必要条件でない
(ウ) 必要十分条件である
(エ) 必要条件でも十分条件でもない
- (5) 命題「 $xy \neq 8$ ならば、 $x \neq 4$ または $y \neq 2$ である。」の対偶とその真偽を書け。
ただし、 x, y は実数とする。

[$\alpha-8$] 場合の数と確率

- (1) 5個の数字1, 2, 3, 4, 5の中から異なる数字を用いてできる3桁の整数は何個あるか。
- (2) 7人の生徒から図書委員を3人選ぶ方法は何通りあるか。
- (3) 右図のような道のある町で、AからBを通過してCまで行く最短距離の道順は何通りあるか。



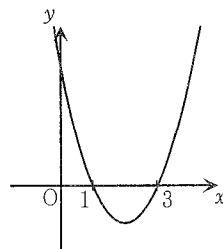
- (4) 白球4個、黒球5個の球が入っている袋から同時に3個の球を取り出すとき、白球2個、黒球1個である確率を求めよ。
- (5) 1枚の硬貨を続けて4回投げるとき、表がちょうど2回出る確率を求めよ。

[$\alpha - 9$] 方程式と不等式

- (1) 2次方程式 $x^2 + 6x = 7$ を解け。
- (2) 不等式 $\frac{x-2}{2} < \frac{x}{3}$ を解け。
- (3) $\frac{3}{\sqrt{6}-\sqrt{3}}$ の分母を有理化せよ。
- (4) $(x-1)^2(x+1)^2$ を展開せよ。
- (5) 2次方程式 $x^2 - 4x + k = 0$ が $x = 1$ を解にもつとき、定数 k の値を求めよ。

[$\alpha - 10$] 2次関数 (2次不等式は除く)

- (1) 2次関数 $y = -(x-2)^2 + 5$ のグラフについて、頂点の座標を求めよ。
- (2) 2次関数 $y = -x^2 + 3x + 2$ のグラフと x 軸との共有点の x 座標を求めよ。
- (3) 2次関数 $y = x^2 - 6x + k$ が最小値 -4 をとるとき、定数 k の値を求めよ。
- (4) 2次関数 $y = x^2 + 4x - m$ のグラフが x 軸と接するとき、定数 m の値を求めよ。
- (5) 2次関数 $y = x^2 + bx + c$ のグラフが右図のようになるとき、定数 b, c の値を求めよ。



[$\alpha - 11$] 図形と計量 (正弦定理, 余弦定理, 図形の計量は除く)

- (1) $\sin 30^\circ$ の値を求めよ。
- (2) θ が鋭角で $\cos \theta = \frac{3}{4}$ のとき、 $\sin \theta$ の値を求めよ。
- (3) $\sin 120^\circ \times \cos 120^\circ$ の値を求めよ。
- (4) 次の三角比の中で、 $\cos 70^\circ$ と値が等しいものを(ア)～(エ)から1つ選び、記号で答えよ。
 (ア) $\cos 20^\circ$ (イ) $\sin 20^\circ$ (ウ) $\cos 30^\circ$ (エ) $\sin 30^\circ$
- (5) $0^\circ \leq \theta \leq 180^\circ$ で、 $\tan \theta = -1$ を満たす θ の値を求めよ。

S II β 学 力 テ ス ト

β 共通問題

(ここで使用している i は虚数単位とする)

次の問いに答えよ。

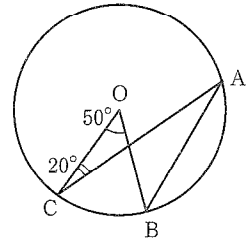
- (1) 等式 $x^2 = (x-1)(x-2) + a(x-1) + b$ が x についての恒等式となるように、定数 a, b の値を定めよ。
- (2) $x = 1+i$ のとき、整式 $x^3 - 2x^2 + 2x + 3$ の値を求めよ。
- (3) 3点 $(1, 4), (5, 8), (-1, a)$ が同一直線上にあるように、定数 a の値を定めよ。
- (4) $0 \leq \theta < 2\pi$ のとき、方程式 $\sin 2\theta = \sin \theta$ を解け。
- (5) 不等式 $9 \times 3^x \leq \frac{1}{9}$ を解け。
- (6) 16^{10} は何桁^{けた}の数となるか。ただし、 $\log_{10} 2 = 0.3010$ とする。
- (7) 放物線 $y = -x^2 + 3x$ 上の点 $(1, 2)$ における接線の方程式を求めよ。
- (8) 等式 $\int_a^x f(t) dt = 2x^2 + 5x - 3$ を満たす定数 a の値を求めよ。
- (9) $1 \leq x \leq 8$ のとき、関数 $y = (\log_2 x)^2 - 4 \log_2 x - 2$ について次の問いに答えよ。
 - (ア) $\log_2 x = t$ とおくとき、 t のとりうる値の範囲を求めよ。
 - (イ) 関数 y の最小値を求めよ。また、そのときの x の値を求めよ。(途中経過を書け)
- (10) 放物線 $y = x^2 + 2x - 8$ と直線 $y = 4x$ がある。このとき、次の問いに答えよ。
 - (ア) この放物線と直線の共有点の x 座標を求めよ。
 - (イ) この放物線と直線で囲まれた部分の面積を求めよ。(途中経過を書け)

β 選択問題

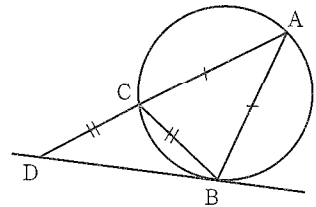
[β-1] から [β-7] までの7群のうち、学校で指定された2群を解答すること。

[β-1] **平面図形**

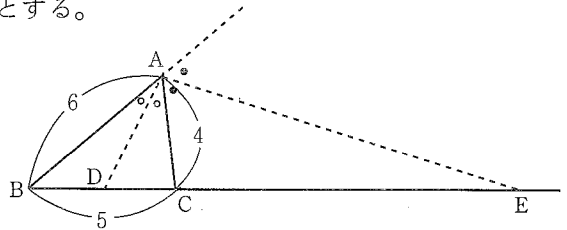
- (1) 右図のように、円Oの円周上に3点A, B, Cがある。
 $\angle BOC = 50^\circ$, $\angle ACO = 20^\circ$ のとき、 $\angle ABO$ の大きさを求めよ。



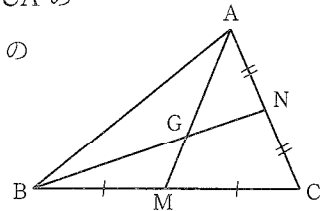
- (2) 右図のように、 $AB=AC$ の二等辺三角形 ABC (ただし、 $\angle A < 60^\circ$ とする) が円に内接している。ACの延長線と点Bにおけるこの円の接線との交点をDとする。BC=CDとなるとき、 $\angle BDC$ の大きさを求めよ。



- (3) 右図の $\triangle ABC$ において、 $\angle A$ およびその外角の二等分線が、直線 BC と交わる点をそれぞれ D, E とする。
 $AB = 6$, $BC = 5$, $CA = 4$ のとき、DE の長さを求めよ。



- (4) 右図の $\triangle ABC$ において、点 M, N はそれぞれ辺 BC, CA の中点である。線分 AM, BN の交点を G とし、 $\triangle AGN$ の面積を 1 とするとき、 $\triangle ABC$ の面積を求めよ。



[β-2] 集合と論理

- (1) 次の (ア) ~ (オ) の命題のうち、真であるものをすべて選び記号で答えよ。
ただし、 a, b, c, x は実数、 n は自然数とする。
- (ア) $x^2 - 8x + 16 = 0$ ならば、 $x = 4$ である。
 (イ) $0 < x \leq 3$ ならば、 $-2 < x < 3$ である。
 (ウ) $ac = bc$ ならば、 $a = b$ である。
 (エ) 「四角形 ABCD は正方形」ならば、「四角形 ABCD はひし形」である。
 (オ) 「 n は 24 の約数」ならば、「 n は 6 の約数」である。
- (2) 全体集合を $U = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$ とする。 U の 2 つの部分集合 A, B について、 $\overline{A} \cap B = \{3, 9\}$ 、 $A \cap \overline{B} = \{2, 4\}$ 、 $\overline{A \cup B} = \{5, 7, 8\}$ が成り立つとき、集合 A を要素を書き並べる方法で表せ。
- (3) 100 以下の自然数のうち、4 または 6 で割り切れる数の個数を求めよ。
- (4) 次の () にあてはまるものを下の ① ~ ④ から選び、記号で答えよ。
実数 x に対して、() は $x^2 = 16$ であるための、必要条件であるが、十分条件でない。

- | | | | |
|-----------|------------------------|-------------|-----------|
| ① $x = 4$ | ② $x = -4$ または $x = 4$ | ③ $ x > 0$ | ④ $x < 0$ |
|-----------|------------------------|-------------|-----------|

[β-3] 場合の数と確率

- (1) 男子 3 人、女子 3 人が 1 列に並ぶとき、男女が交互に並ぶ並び方は何通りあるか。
- (2) 6 枚のカード

0

1

1

1

2

2

 がある。これらのカードをすべて使ってできる 6 桁の整数は何個あるか。
- (3) 8 本のくじの中に 3 本の当たりくじが入っている。この 8 本のくじから同時に 3 本をひくとき、少なくとも 1 本が当たりくじである確率を求めよ。
- (4) 袋の中に赤球 5 個と青球 4 個が入っている。この袋の中から 1 個の球を取り出して色を確認し、もとに戻したあともう一度 1 個を取り出す。取り出した球が 2 個とも同じ色である確率を求めよ。

[β-4] 数 列

- (1) 初項 50, 公差 -3 の等差数列において, 初めて負の数があるのは第何項であるか。
- (2) 3つの数 $\frac{1}{2}a, 2, a$ がこの順で等比数列となるとき, a の値を求めよ。
- (3) $\sum_{k=1}^n \{k^2 - (k-1)^2\}$ を求めよ。
- (4) 自然数を 1 から以下の規則にしたがって, 下図のように順に並べる。

「1行目には1個, 2行目には2個, 3行目には3個, …… , n 行目には n 個の数を左端から並べる。」

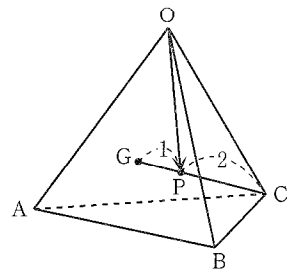
たとえば, 9は上から4行目, 左から3列目の位置である。

このように自然数を並べていくと 200 は上から何行目, 左から何列目の位置であるか。

	(1 列目)	(2 列目)	(3 列目)	(4 列目)	……
(1行目)	1				
(2行目)	2	3			
(3行目)	4	5	6		
(4行目)	7	8	9	10	
⋮	11	12	13	14	15
⋮	16	…			

[β-5] ベクトル

- (1) $\vec{a} = (1, -4), \vec{b} = (-3, 2)$ のとき, $4\vec{a} + 3\vec{b}$ を成分で表せ。
- (2) 4点 $A(1, 3), B(4, 2), C(5, 5), D(a, b)$ を頂点とする四角形 ABCD が平行四辺形となるように, 定数 a, b の値を定めよ。
- (3) $|\vec{a}| = 1, |\vec{b}| = 4, \vec{a} \cdot \vec{b} = 2$ のとき, $|2\vec{a} - \vec{b}|$ の値を求めよ。
- (4) 四面体 OABC において, $\triangle OAB$ の重心を G, 線分 GC を 1:2 の比に内分する点を P とする。 $\vec{OA} = \vec{a}, \vec{OB} = \vec{b}, \vec{OC} = \vec{c}$ とするとき, \vec{OP} を $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ を用いて表せ。



[β-6] 数学Ⅱ①

- (1) 2次方程式 $x^2+2ax+a+2=0$ が実数解をもつとき、定数 a の値の範囲を求めよ。
- (2) $\sin \theta + \cos \theta = -\frac{\sqrt{3}}{2}$ のとき、 $\sin \theta \cos \theta$ の値を求めよ。
- (3) 点 $(1, 2)$ を中心とし、直線 $x-3y-5=0$ に接する円の方程式を求めよ。
- (4) 定積分 $\int_0^3 |x^2-x| dx$ を求めよ。

[β-7] 数学Ⅱ②

- (1) $ab=1$ のとき、 $\frac{1}{a+1} + \frac{1}{b+1}$ の値を求めよ。ただし、 a, b はともに -1 でない実数とする。
- (2) 方程式 $4^x - 6 \times 2^x - 16 = 0$ を解け。
- (3) 原点 O と点 $A(3, 0)$ に対して、 $OP:AP=2:1$ となる点 P の軌跡の方程式を求めよ。
- (4) 関数 $f(x) = -x^3 + 3x^2 + 1$ の極小値と極大値の積を求めよ。