平成19年度　春季県下一斉学力テスト $\boxed{\text{SⅡ}\alpha}$ 解答 No.1

［ α－1］ 式と証明・高次方程式

(1) $\dfrac{x+3}{x^2+7x+12}=\dfrac{x+3}{(x+3)(x+4)}=\dfrac{1}{x+4}$

(2) $(3+4i)\times(3-4i)=3^2-(4i)^2=9-16i^2$

$=9+16=25$

(3) $x^2+2x-4=0$ の2つの解を α，β とすると

解と係数の関係より

$\alpha+\beta=-2$，　$\alpha\beta=-4$　したがって

$(\alpha+1)(\beta+1)=\alpha\beta+\alpha+\beta+1$

$=-4+(-2)+1=-5$

(4) $P(x)=x^3+2x^2+3x+5$ を

$x+1$ で割ったときの商を $Q(x)$，余りを R とすると

$P(x)=(x+1)Q(x)+R$ となる。

ここで x に -1 を代入すると

$P(-1)=(-1+1)Q(-1)+R$

$=0\times Q(-1)+R$

$=R$ となる。

そこで $P(-1)$ を求めると

$P(-1)=(-1)^3+2\times(-1)^2+3\times(-1)+5$

$=-1+2-3+5=3$

よって余りは 3

(5) $x^4=16$

$x^4-16=0$

$(x^2+4)(x^2-4)=0$

$x^2+4=0$ のとき $x^2=-4$ を解いて

$x=\pm\sqrt{4}\,i$

$=\pm 2i$

$x^2-4=0$ のとき $(x+2)(x-2)=0$ を解いて

$x=\pm 2$

よって　$x=\pm 2,\ \pm 2i$

［ α－2］ 図形と方程式

(1) A(1，3)，B(6，2) であるから

$\mathrm{AB}=\sqrt{(6-1)^2+(2-3)^2}=\sqrt{26}$

(2) 線分 AB を 2 : 1 の比に内分する点の座標は

$\left(\dfrac{1\times 2+2\times 8}{2+1},\ \dfrac{1\times 2+2\times(-1)}{2+1}\right)$

よって，(6，0)

(3) 点 (−2，3) を通り，傾き3の直線の方程式は

$y-3=3\{x-(-2)\}$

$y-3=3(x+2)$

よって，$y=3x+9$　〔$3x-y+9=0$ も可〕

(4) $x^2+y^2-8x+6y+21=0$ を変形して

$(x-4)^2+(y+3)^2=2^2$

よって，この円の中心の座標と半径は

中心 (4，−3)，半径2

(5) 連立方程式 $\begin{cases} x^2+y^2=5 & \cdots ① \\ y=2x+5 & \cdots ② \end{cases}$ とおいて

② を ① に代入すると

$x^2+(2x+5)^2=5$

$x^2+4x^2+20x+25=5$

$5x^2+20x+20=0$

両辺を5で割ると

$x^2+4x+4=0$

$(x+2)^2=0$　よって　$x=-2$

このとき ② より

$y=2\times(-2)+5=1$

したがって，求める接点の座標は

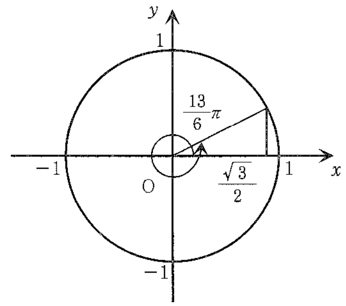
(−2，1)

［ α－3］ 三角関数

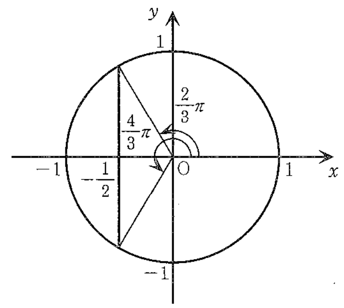
(1) $180^\circ=\pi$ より $1^\circ=\dfrac{\pi}{180}$

よって，$225^\circ=\dfrac{\pi}{180}\times 225=\dfrac{225}{180}\pi=\dfrac{5}{4}\pi$

(2) $\cos\dfrac{13}{6}\pi=\cos\left(2\pi+\dfrac{1}{6}\pi\right)=\cos\dfrac{1}{6}\pi=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$



(3) $\cos\theta=-\dfrac{1}{2}$ であるから，図より $\theta=\dfrac{2}{3}\pi,\ \dfrac{4}{3}\pi$



(4) 三角関数の加法定理を用いると

$\sin(x+60^\circ)=\sin x\cos 60^\circ+\cos x\sin 60^\circ$

$=\sin x\times\dfrac{1}{2}+\cos x\times\dfrac{\sqrt{3}}{2}$

$=\dfrac{1}{2}\sin x+\dfrac{\sqrt{3}}{2}\cos x$

よって (ア) 1，(イ) $\sqrt{3}$

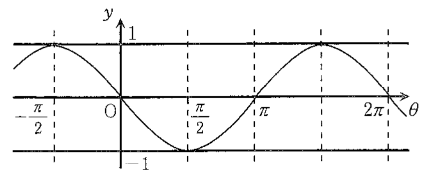
(5) $y=\cos\theta$ のグラフを x 軸方向に $\dfrac{\pi}{2}$ 平行移動したグラフが $y=\sin\theta$ のグラフと一致する。

すなわち，$\cos\left(\theta-\dfrac{\pi}{2}\right)=\sin\theta$ なので，(ウ)

参考図

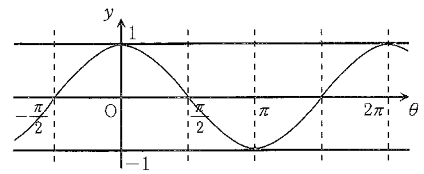
(ア)

$y=\cos\left(\theta+\dfrac{\pi}{2}\right)$



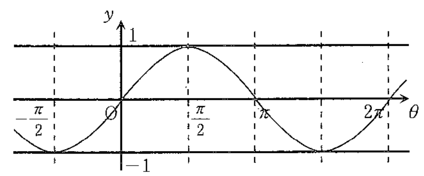
(イ)

$y=\sin\left(\theta+\dfrac{\pi}{2}\right)$



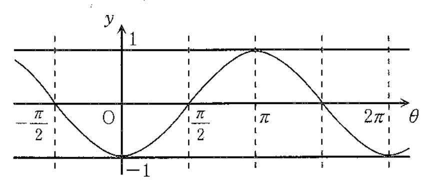
(ウ)

$y=\cos\left(\theta-\dfrac{\pi}{2}\right)$



(エ)

$y=\sin\left(\theta-\dfrac{\pi}{2}\right)$



[α−4] 指数関数・対数関数

(1) $5^{-\frac{1}{2}}\times 5^{\frac{5}{2}}=5^{-\frac{1}{2}+\frac{5}{2}}$
$=5^2$
$=\underline{\underline{25}}$

(2) $\sqrt[4]{2}\times\sqrt[4]{8}=\sqrt[4]{2\times 8}$
$=\sqrt[4]{2^4}$
$=\underline{\underline{2}}$

(3) $\log_4 28-\log_4 7=\log_4\dfrac{28}{7}$
$=\log_4 4$
$=\underline{\underline{1}}$

(4) $9\times 3^x=\dfrac{1}{9}$
$3^x=\dfrac{1}{81}$
$3^x=3^{-4}$
よって　$\underline{\underline{x=-4}}$

(5) $\log_2(x-4)=2$ について，
真数は正であるから
　$x-4>0$　よって，$x>4$ …①
対数の定義により
　$x-4=2^2$
　　$x=8$
これは①を満たすから条件に適する。
よって，　$\underline{\underline{x=8}}$

[α−5] 微分・積分の考え

(1) $y=x^3-2x^2+4x+1$　より
$y'=3x^2-2\cdot 2x+4\cdot 1$　よって
$\underline{\underline{y'=3x^2-4x+4}}$

(2) $y=-x^2+3x$ より
$y'=-2x+3$ …①
よって放物線 $y=-x^2+3x$ 上の点の x 座標 -1 を①に代入すると，接線の傾きは
$-2\times(-1)+3=\underline{\underline{5}}$　となる。

(3) $f(x)=x^3+6x^2+9x+5$ より
$f'(x)=3x^2+12x+9$
$=3(x^2+4x+3)$
$=3(x+3)(x+1)$
よって $f'(x)=0$ のとき，$x=-3,\ -1$ となる。
また $f(-3)=5$，$f(-1)=1$ より
増減表は次のようになる。

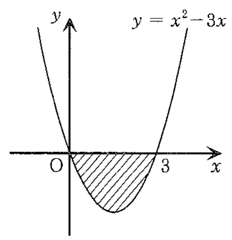
x	…	-3	…	-1	…
$f'(x)$	+	0	−	0	+
$f(x)$	↗	5	↘	1	↗

よって，$f(x)$ は $x=-1$ のとき$\underline{\underline{極小値 1}}$ をとる。

(4) $\displaystyle\int(x+3)^2dx=\int(x^2+6x+9)dx$
$=\dfrac{1}{3}x^3+6\times\dfrac{1}{2}x^2+9\times x+C$
$=\underline{\underline{\dfrac{1}{3}x^3+3x^2+9x+C}}$

(5) 放物線 $y=x^2-3x$ と x 軸との交点を求めると，
$x^2-3x=0$ より $x(x-3)=0$，よって $x=0,\ 3$
求める面積を S とすると

$S=-\displaystyle\int_0^3(x^2-3x)dx=\int_0^3(-x^2+3x)dx$
$=\left[-\dfrac{1}{3}x^3+\dfrac{3}{2}x^2\right]_0^3$
$=\left(-\dfrac{1}{3}\cdot 3^3+\dfrac{3}{2}\cdot 3^2\right)-0$
$=-9+\dfrac{27}{2}=\underline{\underline{\dfrac{9}{2}}}$



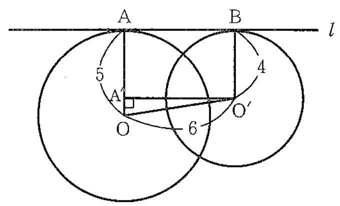
[α−6] 平面図形

(1) AB < BC < CA より　$\underline{\underline{\angle C<\angle A<\angle B}}$

(2) BD が直径だから
$\angle BAD=90^\circ$
したがって $\angle ADB=90^\circ-40^\circ=50^\circ$
同じ弧に対する円周角は等しいので
$\angle ACB=\angle ADB=\underline{\underline{50^\circ}}$

(3) 四角形 ABCD は円に内接しているので
$\angle BAD=180^\circ-105^\circ=75^\circ$
接線と弦のつくる角の定理により
$\angle ADB=\angle BAT=50^\circ$
したがって
$\angle ABD=180^\circ-(75^\circ+50^\circ)$
$=\underline{\underline{55^\circ}}$

(4) 方べきの定理により
$AP\cdot BP=CP\cdot DP$ であるから
$AP\cdot 6=5\cdot 7$
$AP=\underline{\underline{\dfrac{35}{6}}}$

(5)


上図のように O′ を通り AB と平行な直線を引き OA との交点を A′ とする。
すると △OO′A′ は直角三角形で
$OA'=5-4=1$
三平方の定理より
$A'O'^2+1^2=6^2$ であるから
$A'O'^2=35$
$A'O'=\sqrt{35}$
したがって，$AB=A'O'$ より
$AB=\underline{\underline{\sqrt{35}}}$

[α−7] 集合と論理

(1) 50 以下の自然数のうち，4 の倍数の集合は
$\{4\times1,\ 4\times2,\ 4\times3,\ \cdots\cdots,\ 4\times12\}$
であるから
　$\underline{\underline{12 個}}$

(2) $\overline{A}$ は，U の要素であって A の要素ではないものなので，
$\overline{A}=\{3,4,6,8\}$
したがって
$\overline{A}\cap B=\underline{\underline{\{3,8\}}}$

(3) (ア) 2 の倍数は 4 の倍数とは限らないので　偽
　（反例　6 は 2 の倍数であるが 4 の倍数ではない）
(イ) $x=1$ ならば $x^2-4x+3=0$ は　真
(ウ) $ac=bc$ ならば $a=b$ とは限らないので　偽
　（反例　$a=1,\ b=2,\ c=0$ のとき $ac=bc$ であるが $a\neq b$）
(エ) $x<3$ ならば $x<4$ は　真
以上より　真であるものは　$\underline{\underline{(イ) と (エ)}}$

(4)「四角形 ABCD がひし形 ⇒ 四角形 ABCD が正方形」は　偽（正方形でないひし形があるから）
「四角形 ABCD が正方形 ⇒ 四角形 ABCD がひし形」は　真
したがって必要条件であるが十分条件ではないから　$\underline{\underline{(ア)}}$

(5) 対偶 $\underline{\underline{「x=4 かつ y=2 ならば，xy=8 である。」}}$
この命題は　$\underline{\underline{真}}$

平成19年度　春季県下一斉学力テスト $\boxed{\mathrm{S\,II}\,\alpha}$ 解答 №3

［α－8］ 場合の数と確率

(1) ${}_5P_3=5\times4\times3=\underline{\underline{60\text{（個）}}}$

(2) ${}_7C_3=\dfrac{7\times6\times5}{3\times2\times1}=\underline{\underline{35\text{（通り）}}}$

(3) AからBへは $\dfrac{4!}{3!1!}=4$（通り）

BからCへは $\dfrac{3!}{2!1!}=3$（通り）の方法があるから，

AからBを通ってCへ行く方法は

$4\times3=\underline{\underline{12\text{（通り）}}}$

(4) 袋の中の9個の球から同時に3個を取り出す方法は ${}_9C_3$ 通りある。このうち白球4個から2個，黒球5個から1個を取り出す場合は ${}_4C_2\times{}_5C_1$ 通りである。よって求める確率は

$$\frac{{}_4C_2\times{}_5C_1}{{}_9C_3}=\frac{\dfrac{4\cdot3}{2\cdot1}\times5}{\dfrac{9\cdot8\cdot7}{3\cdot2\cdot1}}=\frac{2\cdot3\cdot5}{3\cdot4\cdot7}=\underline{\underline{\frac{5}{14}}}$$

(5) 表，表，裏，裏と出る確率は $\dfrac{1}{2}\times\dfrac{1}{2}\times\dfrac{1}{2}\times\dfrac{1}{2}$

表の2回がどこで出るかは ${}_4C_2$ 通りの場合があるので

$${}_4C_2\times\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}=\frac{4\cdot3}{2\cdot1}\times\left(\frac{1}{2}\right)^4$$

$$=6\times\frac{1}{16}=\underline{\underline{\frac{3}{8}}}$$

［α－9］ 方程式と不等式

(1) $x^2+6x=7$

移項して　$x^2+6x-7=0$

左辺を因数分解して　$(x+7)(x-1)=0$

$\underline{\underline{x=-7,\ 1}}$

(2) $\dfrac{x-2}{2}<\dfrac{x}{3}$ の両辺に6をかけて

$6\times\dfrac{x-2}{2}<6\times\dfrac{x}{3}$

$3(x-2)<2x$

$3x-6<2x$

$3x-2x<6$

$\underline{\underline{x<6}}$

(3) $\left(\sqrt{6}+\sqrt{3}\right)$ を分母，分子にかけて

$$\frac{3\left(\sqrt{6}+\sqrt{3}\right)}{\left(\sqrt{6}-\sqrt{3}\right)\left(\sqrt{6}+\sqrt{3}\right)}$$

$$=\frac{3\left(\sqrt{6}+\sqrt{3}\right)}{\left(\sqrt{6}\right)^2-\left(\sqrt{3}\right)^2}$$

$$=\frac{3\left(\sqrt{6}+\sqrt{3}\right)}{6-3}$$

$$=\frac{3\left(\sqrt{6}+\sqrt{3}\right)}{3}$$

$$=\underline{\underline{\sqrt{6}+\sqrt{3}}}$$

(4) $(x-1)^2(x+1)^2$

$=\{(x-1)(x+1)\}^2$

$=(x^2-1)^2$

$=(x^2)^2-2\cdot x^2\cdot1+1$

$=\underline{\underline{x^4-2x^2+1}}$

(5) $x^2-4x+k=0$ に $x=1$ を代入して

$1^2-4\cdot1+k=0$

$1-4+k=0$

$\underline{\underline{k=3}}$

［α－10］ 2次関数（2次不等式は除く）

(1) 2次関数 $y=a(x-p)^2+q$ のグラフの頂点の座標は $(p,\ q)$ である。

したがって，$y=-(x-2)^2+5$ のグラフの頂点の座標は $\underline{\underline{(2,\ 5)}}$

(2) 2次関数 $y=x^2+3x+2$ のグラフと x 軸との共有点の x 座標は，方程式 $x^2+3x+2=0$ の解である。

左辺を因数分解して $(x+2)(x+1)=0$

したがって　$x=\underline{\underline{-2,\ -1}}$

(3) $y=x^2-6x+k$ を変形して

$y=(x-3)^2+k-9$

したがって，$x=3$ のとき最小値 $k-9$ をとるから

$k-9=-4$ より　$\underline{\underline{k=5}}$

(4) 2次関数 $y=ax^2+bx+c$ のグラフが x 軸と接する条件は $b^2-4ac=0$ である。

したがって

$4^2-4\cdot1\cdot(-m)=0$

$16+4m=0$

$4m=-16$

$\underline{\underline{m=-4}}$

(5) $y=x^2+bx+c$ のグラフが2点 $(1,\ 0)$ と $(3,\ 0)$ を通るから，

$x=1,\ y=0$ を代入して

$1+b+c=0$ ……①

$x=3,\ y=0$ を代入して

$9+3b+c=0$ ……②

②－①より

$8+2b=0$

$b=-4$

①に代入して　$1-4+c=0$ より

$c=3$

したがって　$\underline{\underline{b=-4,\ c=3}}$

（別解）

$y=x^2+bx+c$ のグラフが x 軸と2点 $(1,\ 0)$，$(3,\ 0)$ で交わるので，

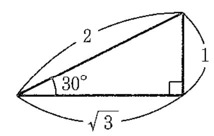
この関数は $y=(x-1)(x-3)$ となる。

展開して，$y=x^2-4x+3$ より

$\underline{\underline{b=-4,\ c=3}}$

［α－11］ 図形と計量
（正弦定理，余弦定理，図形の計量は除く）

(1) $\sin30^\circ=\underline{\underline{\dfrac{1}{2}}}$



(2) $\sin^2\theta+\cos^2\theta=1$ に $\cos\theta=\dfrac{3}{4}$ を代入して

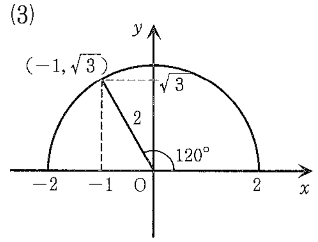
$\sin^2\theta+\left(\dfrac{3}{4}\right)^2=1$

$\sin^2\theta=1-\dfrac{9}{16}=\dfrac{16}{16}-\dfrac{9}{16}=\dfrac{7}{16}$

θ が鋭角なので，$\sin\theta>0$ より

$\sin\theta=\sqrt{\dfrac{7}{16}}=\underline{\underline{\dfrac{\sqrt{7}}{4}}}$

(3)



図より

$\sin120^\circ=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$

$\cos120^\circ=-\dfrac{1}{2}$

したがって

$\sin120^\circ\times\cos120^\circ=\dfrac{\sqrt{3}}{2}\times\left(-\dfrac{1}{2}\right)=\underline{\underline{-\dfrac{\sqrt{3}}{4}}}$

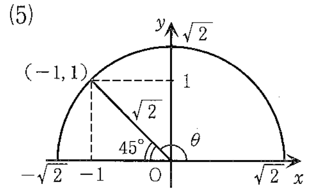
(4) $\cos(90^\circ-\theta)=\sin\theta$ であるから

$\cos70^\circ=\cos(90^\circ-20^\circ)$

$=\sin20^\circ$

したがって　$\underline{\underline{(イ)}}$

(5)



$\tan\theta=\dfrac{1}{-1}$ より

左図のようになる。

よって，

$\underline{\underline{\theta=135^\circ}}$

平成19年度　春季県下一斉学力テスト $\boxed{\text{SⅡ}\beta}$ 解答 №1

β共通問題

(1) 左辺 $= x^2$

右辺 $= (x-1)(x-2)+a(x-1)+b$

$= x^2-3x+2+ax-a+b$

$= x^2+(a-3)x+2-a+b$

両辺の係数を比較して

$a-3=0$ … ①

$2-a+b=0$ … ②

①，②より $a=3,\ b=1$

【別解】

等式に $x=1$ を代入すると

$1=b$ … ①

同様に $x=2$ を代入すると

$4=a+b$ … ②

①，②より $a=3$，$b=1$

逆にこれらを元の式の右辺に代入すると

左辺＝右辺となり，x についての恒等式となる

すなわち，$a=3,\ b=1$

(2) $x=1+i$ より，$x-1=i$ の両辺を2乗すると

$x^2-2x+1=-1$ より

$x^2-2x+2=0$ となる。

$$\begin{array}{r} x \\ x^2-2x+2 \overline{\smash{)}\, x^3-2x^2+2x+3} \\ \underline{x^3-2x^2+2x} \\ 3 \end{array}$$

よって，$x^3-2x^2+2x+3=(x^2-2x+2)x+3$ となる。

したがって，$x^2-2x+2=0$ より

$x=1+i$ のとき，整式 x^3-2x^2+2x+3 の値は 3

(3) 2点 $(1,\ 4)$，$(5,\ 8)$ を通る直線の方程式は

$y-4=\dfrac{8-4}{5-1}(x-1)$

$y-4=x-1$

よって，$y=x+3$

3点が同一直線上にあるためには，点 $(-1,\ a)$ が直線 $y=x+3$ 上にあればよいから

$a=-1+3$ よって，$a=2$

(4) $\sin 2\theta-\sin\theta=0$ に

加法定理より $\sin 2\theta=2\sin\theta\cos\theta$ を代入すると

$2\sin\theta\cos\theta-\sin\theta=0$

$\sin\theta(2\cos\theta-1)=0$ より

$\sin\theta=0$ または $2\cos\theta-1=0$

つまり $\sin\theta=0$ または $\cos\theta=\dfrac{1}{2}$

$0\leqq\theta<2\pi$ だから

$\sin\theta=0$ をみたす θ は $\theta=0,\ \pi$

$\cos\theta=\dfrac{1}{2}$ をみたす θ は $\theta=\dfrac{\pi}{3},\ \dfrac{5}{3}\pi$

よって $\theta=0,\ \dfrac{\pi}{3},\ \pi,\ \dfrac{5}{3}\pi$

(5) $9\times3^x\leqq\dfrac{1}{9}$

$3^x\leqq\dfrac{1}{81}$

$3^x\leqq3^{-4}$

底3は1より大きいから $x\leqq-4$

(6) $\log_{10}16^{10}=\log_{10}(2^4)^{10}=\log_{10}2^{40}$

$=40\log_{10}2=40\times0.3010$

$=12.040$

よって，$12<\log_{10}16^{10}<13$

$\log_{10}10^{12}<\log_{10}16^{10}<\log_{10}10^{13}$

底10は1より大きいから

$10^{12}<16^{10}<10^{13}$

したがって，16^{10} は13桁(けた)の数である。

(7) $y=-x^2+3x$ より

$y'=-2x+3$ … ①

①に，通る点の x 座標，$x=1$ を代入すると

接線の傾きは1となる。

また点 $(1,\ 2)$ を通るので

接線の方程式は $y-2=1(x-1)$

よって $y=x+1$

(8) $\displaystyle\int_a^x f(t)\,dt=2x^2+5x-3$ の両辺に $x=a$ を

代入すると，左辺は0になるので

$0=2a^2+5a-3$ となる。これを解くと

$(a+3)(2a-1)=0$ より

$a=-3,\ \dfrac{1}{2}$

(9)(ア) $1\leqq x\leqq8$ より底2の対数を各辺にとると

$\log_2 1\leqq\log_2 x\leqq\log_2 8$

よって，$0\leqq t\leqq3$ ③

(イ) $\log_2 x=t$ とおくと，

$y=t^2-4t-2$

$=(t-2)^2-6$ と変形できる。△3

$1\leqq x\leqq8$ の範囲では(ア)より

$0\leqq t\leqq3$ であるから，

$t=2$ のとき，最小値 -6 △5

すなわち $\log_2 x=2$ のとき，最小値 -6

そのときの x の値は $x=2^2=4$ である。

最小値 -6　$(x=4)$ ⑦

(10)(ア) 連立方程式 $\begin{cases} y=x^2+2x-8 & \cdots ① \\ y=4x & \cdots ② \end{cases}$

とおいて，①を②に代入すると

$x^2+2x-8=4x$

$x^2-2x-8=0$

$(x+2)(x-4)=0$ よって $x=-2,\ 4$ ③

(イ) 区間 $-2\leqq x\leqq4$ の範囲では，

$4x\geqq x^2+2x-8$ であるから，

求める面積を S とすると，

$S=\displaystyle\int_{-2}^{4}\{4x-(x^2+2x-8)\}dx$ △2

$=\displaystyle\int_{-2}^{4}(-x^2+2x+8)dx$

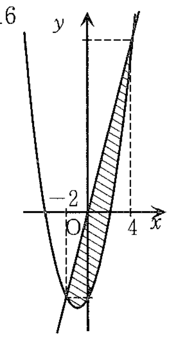
$=\left[-\dfrac{1}{3}x^3+x^2+8x\right]_{-2}^{4}$ △4

$=\left(-\dfrac{1}{3}\times4^3+4^2+8\times4\right)$

$-\left\{-\dfrac{1}{3}\times(-2)^3+(-2)^2+8\times(-2)\right\}$

$=-\dfrac{64}{3}-\dfrac{8}{3}+16+32-4+16$

$=-24+64-4=36$ ⑦



β選択問題

［β−1］平面図形

(1) 下図において

$\angle\mathrm{ABO}+\angle\mathrm{BAC}=\angle\mathrm{ACO}+\angle\mathrm{BOC}$

$=20^\circ+50^\circ$

$=70^\circ$

よって $\angle\mathrm{ABO}=70^\circ-\angle\mathrm{BAC}$ … ①

また $\angle\mathrm{BAC}$ と $\angle\mathrm{BOC}$ は同じ弧 BC に対する円周角と中心角の関係にあるので

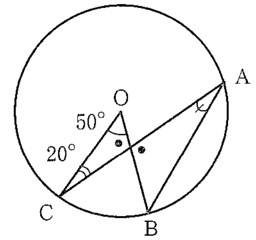
$\angle\mathrm{BAC}=50^\circ\times\dfrac{1}{2}=25^\circ$

である。

①より

$\angle\mathrm{ABO}=70^\circ-25^\circ$

$=45^\circ$



(2) $\angle\mathrm{BDC}=x$ とすると

$\mathrm{BC}=\mathrm{CD}$ より，$\triangle\mathrm{BDC}$ は二等辺三角形だから

$\angle\mathrm{CBD}=\angle\mathrm{BDC}=x$

接線と弦のつくる角の定理より

$\angle\mathrm{BAC}=\angle\mathrm{CBD}=x$

また $\angle\mathrm{ACB}=\angle\mathrm{CDB}+\angle\mathrm{CBD}=2x$

$\mathrm{AB}=\mathrm{AC}$ より，

$\triangle\mathrm{ABC}$ は二等辺三角形だから

$\angle\mathrm{ABC}=\angle\mathrm{ACB}=2x$

よって，

$\triangle\mathrm{ABC}$ の内角の和が

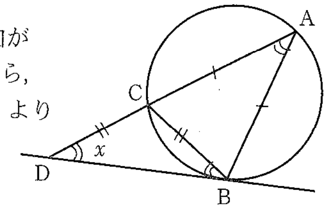
180° であることから，

$x+2x+2x=180^\circ$ より

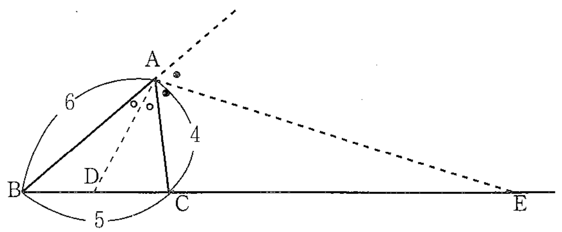
$x=36^\circ$

したがって，

$\angle\mathrm{BDC}=36^\circ$



(3)

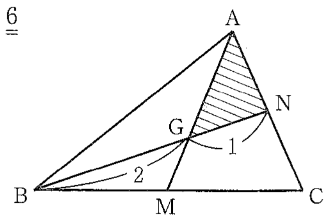


上の図において, AD は ∠BAC の二等分線だから,
BD : DC = AB : AC = 6 : 4 = 3 : 2 より

$DC = 5\times\frac{2}{5} = 2$ … ①

また, AE は ∠BAC の外角の二等分線だから
BE : CE = AB : AC = 6 : 4 = 3 : 2 より
CE = 5×2 = 10 … ②
①と②より　DE = DC+CE = 12

(4) 点Gは重心であるから,
中線BNを 2 : 1 に内分する。
よって, BG : GN = 2 : 1 より
△AGN : △ABN = 1 : 3
また AN = NC より
△ABN : △ABC = 1 : 2
したがって,
△AGN : △ABN : △ABC
= 1 : 3 : 6 となり,
△ABC の面積は 6



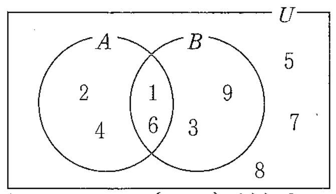
[β−2] 集合と論理

(1) (ア) 真　$\left(\begin{array}{l} x^2-8x+16=0 \text{ の解は} \\ (x-4)^2=0 \text{ より } x=4 \text{ のみ} \end{array}\right)$

(イ) 偽　$\left(\begin{array}{l} \text{反例：} x=3 \text{ が} -2<x<3 \\ \text{を満たさない} \end{array}\right)$

(ウ) 偽　(反例：$a=1$, $b=2$, $c=0$)
(エ) 真　(すべての正方形はひし形である)
(オ) 偽　(反例：$n=8$)
したがって, 真となる命題は, (ア)と(エ)

(2)



上の図より, $A\cap B=\{1,\ 6\}$ だから
$A=\{1,\ 2,\ 4,\ 6\}$

(3) 4の倍数の集合は,
{4×1, 4×2, 4×3, ……, 4×25} で,
その要素の個数は25個
6の倍数の集合は
{6×1, 6×2, 6×3, ……, 6×16} で,
その要素の個数は16個
4と6の公倍数は12の倍数だから, その集合は
{12×1, 12×2, 12×3, ……, 12×8} で,
その要素の個数は8個
4または6で割り切れる数は 25+16−8 = 33 (個)

(4) ①命題「$x=4 \Rightarrow x^2=16$」は真
その逆は, 偽
よって $x=4$ は $x^2=16$ であるための
十分条件であるが必要条件でない。
②命題「$x=-4$ または $x=4 \Rightarrow x^2=16$」は真
その逆も, 真
よって $x=-4$ または $x=4$ は $x^2=16$ で
あるための必要十分条件である。
③命題「$|x|>0 \Rightarrow x^2=16$」は偽
その逆は, 真
よって $|x|>0$ は $x^2=16$ であるための
必要条件であるが十分条件でない。
④命題「$x<0 \Rightarrow x^2=16$」は偽
その逆も, 偽
よって $x<0$ は $x^2=16$ であるための
必要条件でも十分条件でもない。
したがって ③

[β−3] 場合の数と確率

(1) 男子が3人並ぶ方法は 3! = 6 (通り)
女子が3人並ぶ方法は 3! = 6 (通り)
男女男女男女と女男女男女男があるので,
6×6×2 = 72 (通り)

(2) 6桁(けた)の整数の十万の位は2または1である。
十万の位が2のとき「0, 1, 1, 1, 2」の並べ方

だから $\frac{5!}{1!3!1!}=20$ (個)

十万の位が1のとき「0, 1, 1, 2, 2」の並べ方

だから $\frac{5!}{1!2!2!}=30$ (個)

よって, 6桁(けた)の整数は 20+30 = 50 (個)

(3) 1本も当たりくじをひかない確率は $\frac{{}_5C_3}{{}_8C_3}$
よって, 少なくとも1本が当たりくじである確率
はその余事象の確率だから

$1-\frac{{}_5C_3}{{}_8C_3}=1-\frac{5}{28}=\frac{23}{28}$

(4) 2個の色は赤と赤か, または青と青だから
求める確率は

$\frac{5}{9}\times\frac{5}{9}+\frac{4}{9}\times\frac{4}{9}=\frac{41}{81}$

[β−4] 数　列

(1) 初項50, 公差 −3 の等差数列の一般項は
$50+(n-1)\times(-3)=-3n+53$ だから
$-3n+53<0$ を満たす最小の自然数を求めると
$-3n<-53$

$n>\frac{53}{3}\fallingdotseq 17.6$ より

$n=18$　ゆえに　第18項

(2) 一般に,
「数列 a, b, c が等比数列のとき $b^2=ac$」が成り
立つので,

$\frac{1}{2}a\times a=2^2$ より

$a^2=8$　よって　$a=\pm2\sqrt{2}$

【別解】 公比を r とすると

$\frac{1}{2}ar=2$ … ①

$2r=a$ … ②
① より $ar=4$ … ③
②, ③ より r を消去して,
$a^2=8$
ゆえに $a=\pm2\sqrt{2}$

(3) $\sum_{k=1}^{n}\{k^2-(k-1)^2\}$

$=\sum_{k=1}^{n}(k^2-k^2+2k-1)$

$=\sum_{k=1}^{n}(2k-1)=2\sum_{k=1}^{n}k-\sum_{k=1}^{n}1$

$=2\times\frac{1}{2}n(n+1)-n$

$=n^2$

【別解】
$\sum_{k=1}^{n}\{k^2-(k-1)^2\}$

$=\sum_{k=1}^{n}k^2-\sum_{k=1}^{n}(k-1)^2$

$=(1^2+2^2+\cdots+n^2)-\left\{1^2+2^2+\cdots+(n-1)^2\right\}$

$=n^2$

(4) 1行目から n 行目までに含まれる自然数の個数は

$1+2+3+\cdots+n=\frac{1}{2}n(n+1)$

であるから, n 行目の右端の数は $\frac{1}{2}n(n+1)$

$\frac{1}{2}n(n+1)<200$ を満たす最大の自然数 n は

$\frac{1}{2}\cdot19\cdot20=190$,　$\frac{1}{2}\cdot20\cdot21=210$ より

$n=19$ である。
すると, 19行目の右端の数は

$\frac{1}{2}\times19\times(19+1)=190$

したがって, 20行目には191から210までの
20個の数が左から順に並ぶから, 200は
20行目に含まれ, 左から10列目の数になる。

平成19年度　春季県下一斉学力テスト $\boxed{\text{S II }\beta}$ 解答 No. 3

[β−5] ベクトル

(1) $4\vec{a}+3\vec{b}=4(1,\ -4)+3(-3,\ 2)$
$=\underline{\underline{(-5,\ -10)}}$

(2) 四角形 ABCD が平行四辺形となるためには，
$\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{BC}$ であればよいから
$(a-1,\ b-3)=(1,\ 3)$
よって，$a-1=1$，$b-3=3$
これを解くと　$\underline{\underline{a=2,\ b=6}}$

(3) $|2\vec{a}-\vec{b}|^2=4|\vec{a}|^2-4\vec{a}\cdot\vec{b}+|\vec{b}|^2$
$=4\times1^2-4\times2+4^2$
$=12$
$|2\vec{a}-\vec{b}|\geqq0$ なので
$|2\vec{a}-\vec{b}|=\sqrt{12}=\underline{\underline{2\sqrt{3}}}$

(4) $\overrightarrow{OG}=\vec{g}$ とおくと
$\vec{g}=\dfrac{2}{3}\times\dfrac{\vec{a}+\vec{b}}{2}=\dfrac{\vec{a}+\vec{b}}{3}$
点Pは線分GCを1:2の比に内分するから
$\overrightarrow{OP}=\dfrac{2\vec{g}+\vec{c}}{1+2}=\dfrac{1}{3}(2\vec{g}+\vec{c})$
$=\dfrac{1}{3}\times\left(2\times\dfrac{\vec{a}+\vec{b}}{3}+\vec{c}\right)$
$=\dfrac{1}{3}\times\dfrac{2\vec{a}+2\vec{b}+3\vec{c}}{3}$
$=\underline{\underline{\dfrac{2\vec{a}+2\vec{b}+3\vec{c}}{9}}}$

[β−6] 数学II①

(1) 判別式を D とすると $D=4a^2-4a-8$ で，実数解をもつには $D\geqq0$ となればよいので
$4a^2-4a-8\geqq0$
$a^2-a-2\geqq0$
$(a-2)(a+1)\geqq0$
よって $\underline{\underline{a\leqq-1,\ 2\leqq a}}$

(2) $\sin\theta+\cos\theta=-\dfrac{\sqrt{3}}{2}$ の両辺を2乗すると，
$(\sin\theta+\cos\theta)^2=\left(-\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)^2$
$\sin^2\theta+\cos^2\theta+2\sin\theta\cos\theta=\dfrac{3}{4}$
$1+2\sin\theta\cos\theta=\dfrac{3}{4}$ より
$\sin\theta\cos\theta=\underline{\underline{-\dfrac{1}{8}}}$

(3) 求める円の半径を r とおくと，点 $(1,\ 2)$ と直線 $x-3y-5=0$ との距離であるから，
$r=\dfrac{|1-3\times2-5|}{\sqrt{1^2+(-3)^2}}=\dfrac{|-10|}{\sqrt{10}}=\dfrac{10}{\sqrt{10}}=\sqrt{10}$
よって，求める円の方程式は
$\underline{\underline{(x-1)^2+(y-2)^2=10}}$

(4) $\displaystyle\int_0^3|x^2-x|\,dx$
$\displaystyle=\int_0^1(-x^2+x)\,dx+\int_1^3(x^2-x)\,dx$
$=\left[-\dfrac{1}{3}x^3+\dfrac{1}{2}x^2\right]_0^1+\left[\dfrac{1}{3}x^3-\dfrac{1}{2}x^2\right]_1^3$
$=\left(-\dfrac{1}{3}+\dfrac{1}{2}\right)-0+\left(\dfrac{1}{3}\cdot3^3-\dfrac{1}{2}\cdot3^2\right)$
$-\left(\dfrac{1}{3}-\dfrac{1}{2}\right)=\underline{\underline{\dfrac{29}{6}}}$

[β−7] 数学II②

(1) $\dfrac{1}{a+1}+\dfrac{1}{b+1}=\dfrac{b+1+a+1}{(a+1)(b+1)}=\dfrac{a+b+2}{ab+a+b+1}$
ここで $ab=1$ を代入すると，
$\dfrac{1}{a+1}+\dfrac{1}{b+1}=\dfrac{a+b+2}{a+b+2}=\underline{\underline{1}}$

【別解】　$ab=1$ より $b=\dfrac{1}{a}$
これを $\dfrac{1}{a+1}+\dfrac{1}{b+1}$ に代入すると
$\dfrac{1}{a+1}+\dfrac{1}{b+1}=\dfrac{1}{a+1}+\dfrac{1}{\dfrac{1}{a}+1}$
$=\dfrac{1}{a+1}+\dfrac{a}{1+a}=\dfrac{a+1}{a+1}=\underline{\underline{1}}$

(2) $4^x-6\times2^x-16=0$
$(2^x)^2-6\times2^x-16=0$
ここで，$2^x=t$ とおくと
$t^2-6t-16=0$
$(t+2)(t-8)=0$
よって，$t=-2,\ 8$
ここで，$t>0$ であるから $t=8$
$2^x=8$　　$2^x=2^3$
したがって，$\underline{\underline{x=3}}$

(3) 点Pの座標を $(x,\ y)$ とする。
条件より OP : AP = 2 : 1
2AP = OP　よって，$4\mathrm{AP}^2=\mathrm{OP}^2$
$\mathrm{AP}^2=(x-3)^2+y^2$，　$\mathrm{OP}^2=x^2+y^2$
を代入すると
$4\{(x-3)^2+y^2\}=x^2+y^2$
整理すると $x^2-8x+y^2+12=0$
よって，点Pは円 $x^2-8x+y^2+12=0$ 上にある。
逆に，この円上のすべての点 $\mathrm{P}(x,\ y)$ は，条件を満たす。
したがって，求める点Pの軌跡の方程式は
$\underline{\underline{x^2-8x+y^2+12=0}}$
〔$(x-4)^2+y^2=4$ も可〕

(4) $f(x)=-x^3+3x^2+1$ より
$f'(x)=-3x^2+6x=-3x(x-2)$
よって $f'(x)=0$ のとき $x=0,\ 2$
また $f(0)=1$，$f(2)=5$ より
増減表は次のようになる。

x	…	0	…	2	…
$f'(x)$	−	0	+	0	−
$f(x)$	↘	1	↗	5	↘

したがって，$f(x)$ は $x=0$ のとき極小値1，$x=2$ のとき極大値5をもつ。
ゆえに，極小値と極大値の積は $1\times5=\underline{\underline{5}}$