平成19年度　秋季県下一斉学力テスト　SⅢ　解答　No.1

数学Ⅰ　Ⅰ型必修　Ⅱ型必修　Ⅲ型必修

【1】

(1) $x=-1+\sqrt{5}$ を，x^2+2x-6 に代入すると，

$(-1+\sqrt{5})^2+2(-1+\sqrt{5})-6$

$=6-2\sqrt{5}-2+2\sqrt{5}-6$

$=\underline{\underline{-2}}$

【別解】

$x=-1+\sqrt{5}$ より，

$x+1=\sqrt{5}$

両辺2乗して，

$x^2+2x+1=5$ から

$x^2+2x-6=(x^2+2x+1)-7$

$=5-7=\underline{\underline{-2}}$

(2) $y=f(x)$ のグラフを x 軸方向に p，y 軸方向に q 平行移動すると $y-q=f(x-p)$ であるから，$y=x^2+ax+b$ を x 軸方向に3，y 軸方向に5だけ平行移動したグラフの式は，

$y-5=(x-3)^2+a(x-3)+b$

である。これを整理すると

$y=x^2+(a-6)x+(14-3a+b)$

となるので，$y=x^2+x$ と係数を比較して，

$$\begin{cases} a-6=1 \\ 14-3a+b=0 \end{cases}$$

となる。この連立方程式を解いて，

$\underline{\underline{a=7,\ b=7}}$　（両方できて正解とする）

【別解】

$y=x^2+x$ のグラフを x 軸方向に -3，y 軸方向に -5 だけ平行移動して，

$y+5=(x+3)^2+(x+3)$

で考えても良い。

数学Ⅰ　Ⅰ型必修　Ⅱ型選択　Ⅲ型 ／　Ⅱ型の選択は，次より2題選択【2a】【6b】【10a】【11a】

【2a】

(1) $\dfrac{2-x}{3}<\dfrac{x+1}{2}$ の両辺を6倍して，

$4-2x<3x+3$

$-5x<-1$

$\underline{\underline{x>\dfrac{1}{5}}}$

(2) 放物線が x 軸と共有点をもたないので，2次方程式 $x^2-ax+a=0$ は実数解をもたない。

したがって，$x^2-ax+a=0$ の判別式が負になる。

$(-a)^2-4\cdot1\cdot a<0$

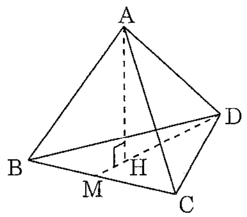
$a(a-4)<0$

$\underline{\underline{0<a<4}}$

(3) 1辺が2の正三角形の面積は，

$\dfrac{1}{2}\cdot2\cdot\sqrt{3}=\sqrt{3}$

また，辺BCの中点をM，頂点Aから△BCDに下ろした垂線と△BCDの交点をHとすると，Hは△BCDの重心であるから



DH:HM＝2：1

$\mathrm{DH}=\dfrac{2\sqrt{3}}{3}$

よって，

$\mathrm{AH}=\sqrt{\mathrm{AD}^2-\mathrm{DH}^2}$

$=\sqrt{2^2-\left(\dfrac{2\sqrt{3}}{3}\right)^2}$

$=\dfrac{2\sqrt{6}}{3}$

正四面体の体積＝$\dfrac{1}{3}$×(底面積)×(高さ)

であるから，求める体積は

$\dfrac{1}{3}\cdot\sqrt{3}\cdot\dfrac{2\sqrt{6}}{3}=\underline{\underline{\dfrac{2\sqrt{2}}{3}}}$

数学Ⅰ　Ⅰ型 ／　Ⅱ型 ／　Ⅲ型選択　Ⅲ型の選択は，次より3題選択【2b】【6c】【10b】【11b】【14】【15】【16】

【2b】

(1) 放物線が x 軸と共有点をもたないので，2次方程式 $x^2-ax+a=0$ は実数解をもたない。

したがって，$x^2-ax+a=0$ の判別式が負になる。

$(-a)^2-4\cdot1\cdot a<0$

$a(a-4)<0$

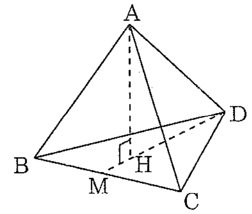
$\underline{\underline{0<a<4}}$

(2) 1辺が2の正三角形の面積は，

$\dfrac{1}{2}\cdot2\cdot\sqrt{3}=\sqrt{3}$

また，辺BCの中点をM，頂点Aから△BCDに下ろした垂線と△BCDの交点をHとすると，

Hは△BCDの重心であるから



DH:HM＝2：1

$\mathrm{DH}=\dfrac{2\sqrt{3}}{3}$

よって，

$\mathrm{AH}=\sqrt{\mathrm{AD}^2-\mathrm{DH}^2}$

$=\sqrt{2^2-\left(\dfrac{2\sqrt{3}}{3}\right)^2}$

$=\dfrac{2\sqrt{6}}{3}$

正四面体の体積＝$\dfrac{1}{3}$×(底面積)×(高さ)

であるから，求める体積は

$\dfrac{1}{3}\cdot\sqrt{3}\cdot\dfrac{2\sqrt{6}}{3}=\underline{\underline{\dfrac{2\sqrt{2}}{3}}}$

数学Ⅰ　Ⅰ型必修　Ⅱ型必修　Ⅲ型 ／

【3】

(i) 外接円の半径を R とすると，正弦定理より

$2R=\dfrac{2\sqrt{2}}{\sin135^\circ}$

$R=\dfrac{2\sqrt{2}}{2\times\dfrac{\sqrt{2}}{2}}$

$\underline{\underline{R=2}}$

(ii) 余弦定理より，

$\mathrm{AB}^2=\mathrm{AC}^2+\mathrm{BC}^2-2\mathrm{AC}\cdot\mathrm{BC}\cos C$

$\mathrm{AC}=b$ として整理すると，$b^2+2\sqrt{2}b-4=0$ となるので，$b=-\sqrt{2}\pm\sqrt{6}$

$b>0$ より，$\underline{\underline{\sqrt{6}-\sqrt{2}}}$

数学Ⅰ　Ⅰ型必修　Ⅱ型 ／　Ⅲ型 ／

【4】

(i) 点Aを頂点とするので，求める2次関数は a を定数として $y=a(x+1)^2+1$ と表せる。

点Bを通るので，$4=a(-4+1)^2+1$

これを解くと，$a=\dfrac{1}{3}$

よって　$\underline{\underline{y=\dfrac{1}{3}(x+1)^2+1}}=\dfrac{1}{3}x^2+\dfrac{2}{3}x+\dfrac{4}{3}$

(ii) x 軸に接するので，求める式は a，p を定数として $y=a(x-p)^2$ と表せる。このグラフが点A，点Bを通るので，

$$\begin{cases} 1=a(-1-p)^2 & \cdots\cdots ① \\ 4=a(-4-p)^2 & \cdots\cdots ② \end{cases}$$

が成り立つ。

①×4　$4=4a(-1-p)^2$

②より

$a(-4-p)^2=4a(-1-p)^2$

これを解くと

$p=\pm2$

これを①（②でもよい）に代入して

$\begin{cases} a=\dfrac{1}{9} \\ p=2 \end{cases}$，　$\begin{cases} a=1 \\ p=-2 \end{cases}$

よって，　$\underline{\underline{y=\dfrac{1}{9}(x-2)^2}}=\dfrac{1}{9}x^2-\dfrac{4}{9}x+\dfrac{4}{9}$

$\underline{\underline{\text{または}\ y=(x+2)^2}}=x^2+4x+4$

数学Ⅰ　Ⅰ型選択　Ⅱ型 ／　Ⅲ型 ／　Ⅰ型の選択は，次より1題選択【5】【6a】

【5】

(1) $x^2-4y^2+4y-1=x^2-(4y^2-4y+1)$

$=x^2-(2y-1)^2$

$=\underline{\underline{(x+2y-1)(x-2y+1)}}$

(2) $x^2+5x-4=0$ を解くと

$x=\dfrac{-5\pm\sqrt{41}}{2}$

よって

$\underline{\underline{x\leqq\dfrac{-5-\sqrt{41}}{2},\quad\dfrac{-5+\sqrt{41}}{2}\leqq x}}$

(3) $\sqrt{3}\tan\theta+3=0$

$\tan\theta=-\sqrt{3}$

$0^\circ\leqq\theta\leqq180^\circ$ より　$\underline{\underline{\theta=120^\circ}}$

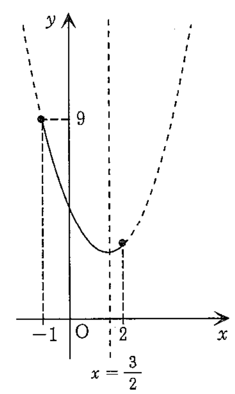
(4) $|x-1|\leqq2$

$-2\leqq x-1\leqq2$

$\underline{\underline{-1\leqq x\leqq3}}$

(5) $y=x^2-3x+5$ の右辺を変形すると，

$y=\left(x-\dfrac{3}{2}\right)^2+\dfrac{11}{4}$



放物線の軸は $x=\dfrac{3}{2}$

最大値は

$x=-1$ と $x=2$ のうち，

軸から離れている方である。

$\underline{x=-1}$ の方が軸よりも

離れているので，このとき

最大値をとる。

よって最大値は，

$(-1)^2-3\cdot(-1)+5=\underline{\underline{9}}$

数学A　[Ⅰ型 選択] [Ⅱ型 ／] [Ⅲ型 ／]　Ⅰ型の選択は，次より1題選択【5】【6a】

【6a】

(1) $A=\{x \mid x^2-x-6<0\}$

$=\{x \mid -2<x<3\}$

また

$\overline{B}=\{x \mid x^2-5x \leqq 0\}$

$=\{x \mid 0 \leqq x \leqq 5\}$

よって，$\underline{A \cap \overline{B}=\{x \mid 0 \leqq x<3\}}$

(2) GWをひとつの文字と見ると，4つの同じ文字を含む7つの文字を並べる場合と考えるので，

$\dfrac{7!}{1!1!1!4!}=210$ 通り。GWの他に WG も同様に数えられるので，求める場合の総数は

$210 \times 2=$ $\underline{420 \text{通り}}$

(3) 一般項は ${}_6C_r(x^2)^{6-r}(-2x)^r={}_6C_r \cdot (-2)^r \cdot x^{12-r}$

x^7 となるのは $r=5$ のときであるから，求める係数は ${}_6C_5 \cdot (-2)^5=6 \times (-32)=$ $\underline{-192}$

【別解】

$(x^2-2x)^6=x^6(x-2)^6$

であるから，x^7 の係数は $(x-2)^6$ における x の係数と一致する。

したがって，求める係数は ${}_6C_1 \cdot (-2)^5=$ $\underline{-192}$

(4) 数字が同じになる事象を A とすると，数字が異なる事象はその余事象 $\overline{A}$ である。

よって，

$P(\overline{A})=1-P(A)=1-\dfrac{{}_3C_2+{}_2C_2}{{}_6C_2}=1-\dfrac{3+1}{15}$

$=\underline{\dfrac{11}{15}}$

(5) a，b の各値に対して得点表を作ると，以下のようになる。

b \ a	1	2	3	4
1	2	2	4	4
2	2	4	6	8
3	4	6	6	12
4	4	8	12	16

したがって，得点 X が得られる確率 P として表を作ると，

得点 (X)	2	4	6	8	12	16	計
確率 (P)	$\frac{3}{16}$	$\frac{5}{16}$	$\frac{3}{16}$	$\frac{2}{16}$	$\frac{2}{16}$	$\frac{1}{16}$	1

よって，求める期待値は

$2 \cdot \dfrac{3}{16}+4 \cdot \dfrac{5}{16}+6 \cdot \dfrac{3}{16}+8 \cdot \dfrac{2}{16}+12 \cdot \dfrac{2}{16}+16 \cdot \dfrac{1}{16}$

$=\underline{\dfrac{25}{4}}$

数学A　[Ⅰ型 ／] [Ⅱ型 選択] [Ⅲ型 ／]　Ⅱ型の選択は，次より2題選択【2a】【6b】【10a】【11a】

【6b】

(1) 一般項は ${}_6C_r(x^2)^{6-r}(-2x)^r={}_6C_r \cdot (-2)^r \cdot x^{12-r}$

x^7 となるのは $r=5$ のときであるから，求める係数は ${}_6C_5 \cdot (-2)^5=6 \times (-32)=$ $\underline{-192}$

【別解】

$(x^2-2x)^6=x^6(x-2)^6$

であるから，x^7 の係数は $(x-2)^6$ における x の係数と一致する。

したがって，求める係数は ${}_6C_1 \cdot (-2)^5=$ $\underline{-192}$

(2) 数字が同じになる事象を A とすると，数字が異なる事象はその余事象 $\overline{A}$ である。

よって，

$P(\overline{A})=1-P(A)=1-\dfrac{{}_3C_2+{}_2C_2}{{}_6C_2}=1-\dfrac{3+1}{15}$

$=\underline{\dfrac{11}{15}}$

(3) a，b の各値に対して得点表を作ると，以下のようになる。

b \ a	1	2	3	4
1	2	2	4	4
2	2	4	6	8
3	4	6	6	12
4	4	8	12	16

したがって，得点 X が得られる確率 P として表を作ると，

得点 (X)	2	4	6	8	12	16	計
確率 (P)	$\frac{3}{16}$	$\frac{5}{16}$	$\frac{3}{16}$	$\frac{2}{16}$	$\frac{2}{16}$	$\frac{1}{16}$	1

よって，求める期待値は

$2 \cdot \dfrac{3}{16}+4 \cdot \dfrac{5}{16}+6 \cdot \dfrac{3}{16}+8 \cdot \dfrac{2}{16}+12 \cdot \dfrac{2}{16}+16 \cdot \dfrac{1}{16}$

$=\underline{\dfrac{25}{4}}$

数学A　[Ⅰ型 ／] [Ⅱ型 ／] [Ⅲ型 選択]　Ⅲ型の選択は，次より3題選択【2b】【6c】【10b】【11b】【14】【15】【16】

【6c】

(1) 数字が同じになる事象を A とすると，数字が異なる事象はその余事象 $\overline{A}$ である。

よって，

$P(\overline{A})=1-P(A)=1-\dfrac{{}_3C_2+{}_2C_2}{{}_6C_2}=1-\dfrac{3+1}{15}$

$=\underline{\dfrac{11}{15}}$

(2) a，b の各値に対して得点表を作ると，以下のようになる。

b \ a	1	2	3	4
1	2	2	4	4
2	2	4	6	8
3	4	6	6	12
4	4	8	12	16

したがって，得点 X が得られる確率 P として表を作ると，

得点 (X)	2	4	6	8	12	16	計
確率 (P)	$\frac{3}{16}$	$\frac{5}{16}$	$\frac{3}{16}$	$\frac{2}{16}$	$\frac{2}{16}$	$\frac{1}{16}$	1

よって，求める期待値は

$2 \cdot \dfrac{3}{16}+4 \cdot \dfrac{5}{16}+6 \cdot \dfrac{3}{16}+8 \cdot \dfrac{2}{16}+12 \cdot \dfrac{2}{16}+16 \cdot \dfrac{1}{16}$

$=\underline{\dfrac{25}{4}}$

数学Ⅱ　[Ⅰ型 ／] [Ⅱ型 必修] [Ⅲ型 必修]

【7】

① 出来上がった絵の，縦に使う枚数を α 枚，横に使う枚数を β 枚，外周部分に必要な枚数を n 枚とすると，

$n=\underline{2}\,(\alpha+\beta)-4$

② また，$\alpha\beta=\underline{900}$

③ ここで，α と β を解にもつような2次方程式 $(x-\alpha)(x-\beta)=0$ を考える。この式は展開して

$x^2-(\alpha+\beta)x+\alpha\beta=0$

と書けるので，①，②を用いて α と β を消去すると，

$x^2-\underline{\dfrac{n+4}{2}}x+\underline{900}=0$

よって，$\dfrac{n+4}{2}=x+\dfrac{900}{x}$　$(x \neq 0)$ —(A)となる。

④ (A)の右辺に，相加平均と相乗平均の関係を用いると，

$\dfrac{n+4}{2}=x+\dfrac{900}{x} \geqq \underline{60}$（等号成立は $x=\underline{30}$ のとき）

⑤ 以上より，外周部分に必要な枚数 n の最小数は $\underline{116}$ となり，これより少ない場合，絵の外周を黒で統一することはできない。

数学Ⅱ　[Ⅰ型 ／] [Ⅱ型 必修] [Ⅲ型 ／]

【8】

真数は正なので，$x-2>0$ かつ $x-5>0$

よって

$x>5$　………①

また，

$\log_2(x-2)(x-5)<2$

$\log_2(x-2)(x-5)<\log_2 2^2$

底は1より大きいので，

$(x-2)(x-5)<2^2$

$x^2-7x+10<4$

$x^2-7x+6<0$

$(x-1)(x-6)<0$

よって

$1<x<6$　………②

①，②より，$\underline{5<x<6}$

数学Ⅱ　[Ⅰ型 ／] [Ⅱ型 必修] [Ⅲ型 必修]

【9】

(i) 曲線 $y=-x^2+4x$ の，点 $(a,\ -a^2+4a)$ における接線の方程式は，$y'=-2x+4$ より

$y-(-a^2+4a)=(-2a+4)(x-a)$　……①

これが点 $(0,\ 1)$ を通るので，

$1-(-a^2+4a)=(-2a+4)(0-a)$

整理すると　$a^2=1$

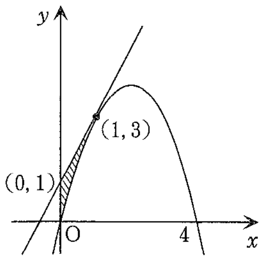
よって　$a=\pm 1$ となるので，

接点の座標は $(1,\ 3)$ または $(-1,\ -5)$

条件より，接点は第1象限にあるので，
接点は $(1,\ 3)$
これを①に代入して，求める接線の方程式は
$\underline{\underline{y=2x+1}}$

(ii) 図の網掛け部分の面積を求めればよいので，これを S とすると，

$$S=\int_0^1\{(2x+1)-(-x^2+4x)\}dx$$
$$=\int_0^1(x^2-2x+1)dx$$
$$=\left[\frac{1}{3}x^3-x^2+x\right]_0^1$$
$$=\frac{1}{3}\cdot1^3-1^2+1$$
$$=\underline{\underline{\frac{1}{3}}}$$



数学II ｜ I型 ／ ｜ II型 選択 ｜ III型 ／ ｜ II型の選択は，次より2題選択【2a】【6b】【10a】【11a】

【10a】

(1) $\dfrac{(1+2i)(a+i)}{3-2i}$
$$=\frac{(1+2i)(a+i)(3+2i)}{(3-2i)(3+2i)}$$
$$=\frac{(-8-a)+(8a-1)i}{13}$$
これが実数となる条件は，虚数部分が0となることなので，
$8a-1=0$
よって　$\underline{\underline{a=\frac{1}{8}}}$

(2) 円 $x^2+y^2=4$ と直線 $y=x+1$ の交点を A, B, 円の中心をOとすると，△OAB は二等辺三角形である。
ここで，点Oと直線 $y=x+1$ との距離は，
$$\frac{|0-0+1|}{\sqrt{1^2+(-1)^2}}=\frac{1}{\sqrt{2}}$$
となるから，三平方の定理を用いれば，
$$AB=2\sqrt{2^2-\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2}=\underline{\underline{\sqrt{14}}}$$

(3) $\cos 2\theta=1-2\sin^2\theta$ より
$y=-2\sin\theta-\cos 2\theta=2\sin^2\theta-2\sin\theta-1$
$t=\sin\theta\quad(-1\leqq t\leqq 1)$ として
$y=2t^2-2t-1$
$$=2\left(t-\frac{1}{2}\right)^2-\frac{3}{2}$$
よって y は $t=\dfrac{1}{2}$ のとき，
すなわち $\underline{\underline{\theta=\frac{\pi}{6}\text{ または }\frac{5}{6}\pi}}$ のときに
最小値 $\underline{\underline{-\frac{3}{2}}}$ をとる。

数学II ｜ I型 ／ ｜ II型 ／ ｜ III型 選択 ｜ III型の選択は，次より3題選択【2b】【6c】【10b】【11b】【14】【15】【16】

【10b】

(1) 円 $x^2+y^2=4$ と直線 $y=x+1$ の交点を A, B, 円の中心をOとすると，△OAB は二等辺三角形である。
ここで，点Oと直線 $y=x+1$ との距離は，
$$\frac{|0-0+1|}{\sqrt{1^2+(-1)^2}}=\frac{1}{\sqrt{2}}$$
となるから，三平方の定理を用いれば，
$$AB=2\sqrt{2^2-\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2}=\underline{\underline{\sqrt{14}}}$$

(2) $\cos 2\theta=1-2\sin^2\theta$ より
$y=-2\sin\theta-\cos 2\theta=2\sin^2\theta-2\sin\theta-1$
$t=\sin\theta\quad(-1\leqq t\leqq 1)$ として
$y=2t^2-2t-1$
$$=2\left(t-\frac{1}{2}\right)^2-\frac{3}{2}$$
よって y は $t=\dfrac{1}{2}$ のとき，
すなわち $\underline{\underline{\theta=\frac{\pi}{6}\text{ または }\frac{5}{6}\pi}}$ のときに
最小値 $\underline{\underline{-\frac{3}{2}}}$ をとる。

数学B ｜ I型 ／ ｜ II型 選択 ｜ III型 ／ ｜ II型の選択は，次より2題選択【2a】【6b】【10a】【11a】

【11a】

(1) $\overrightarrow{CA}=(-3,\ -1,\ 2)$，$\overrightarrow{CB}=(-1,\ -5,\ -4)$
より，
$|\overrightarrow{CA}|=\sqrt{(-3)^2+(-1)^2+2^2}=\sqrt{14}$
$|\overrightarrow{CB}|=\sqrt{(-1)^2+(-5)^2+(-4)^2}=\sqrt{42}$
$$\cos C=\frac{\overrightarrow{CA}\cdot\overrightarrow{CB}}{|\overrightarrow{CA}||\overrightarrow{CB}|}=\frac{3+5-8}{\sqrt{14}\cdot\sqrt{42}}=0$$
よって，$\angle C=\underline{\underline{90^\circ}}$

【別解】
$\overrightarrow{CA}\cdot\overrightarrow{CB}=0$ より $\angle C=90^\circ$

(2) 漸化式 $a_{n+1}=4a_n+3$ を変形すると
$a_{n+1}+1=4(a_n+1)$
$b_n=a_n+1$ とすると
$b_{n+1}=4b_n$
これは公比4の等比数列であるから，
初項 $b_1=a_1+1=2$ を用いて，
$b_n=b_1\cdot4^{n-1}=2\cdot4^{n-1}$
となる。
よって，$a_n=b_n-1=\underline{\underline{2\cdot4^{n-1}-1}}$

(3) 条件より，$\overrightarrow{AM}=\dfrac{1}{2}\overrightarrow{AB}$
$$\overrightarrow{AP}=\frac{4}{5}\overrightarrow{AM}+\frac{1}{5}\overrightarrow{AC}$$
よって　$\overrightarrow{AP}=\dfrac{2}{5}\overrightarrow{AB}+\dfrac{1}{5}\overrightarrow{AC}$
A, P, Q は一直線上にあるので
$\overrightarrow{AQ}=k\overrightarrow{AP}$
$=\dfrac{2}{5}k\overrightarrow{AB}+\dfrac{1}{5}k\overrightarrow{AC}$ ……①
BQ : QC $=(1-s):s$ とすると
$\overrightarrow{AQ}=s\overrightarrow{AB}+(1-s)\overrightarrow{AC}$ ……②
$\overrightarrow{AB}$ と $\overrightarrow{AC}$ は，$\vec{0}$ でなく平行ではないので，①，②から
$$\begin{cases}s=\dfrac{2}{5}k\ \cdots\cdots③\\[2mm] 1-s=\dfrac{1}{5}k\ \cdots\cdots④\end{cases}$$
③，④ より $1-\dfrac{2}{5}k=\dfrac{1}{5}k$
$$\frac{3}{5}k=1$$
$$k=\frac{5}{3}$$
①に戻して
$\underline{\underline{\overrightarrow{AQ}=\frac{2}{3}\overrightarrow{AB}+\frac{1}{3}\overrightarrow{AC}}}$

数学B ｜ I型 ／ ｜ II型 ／ ｜ III型 選択 ｜ III型の選択は，次より3題選択【2b】【6c】【10b】【11b】【14】【15】【16】

【11b】

(1) 漸化式 $a_{n+1}=4a_n+3$ を変形すると
$a_{n+1}+1=4(a_n+1)$
$b_n=a_n+1$ とすると
$b_{n+1}=4b_n$
これは公比4の等比数列であるから，
初項 $b_1=a_1+1=2$ を用いて，
$b_n=b_1\cdot4^{n-1}=2\cdot4^{n-1}$
となる。
よって，$a_n=b_n-1=\underline{\underline{2\cdot4^{n-1}-1}}$

(2) 条件より，$\overrightarrow{AM}=\dfrac{1}{2}\overrightarrow{AB}$
$$\overrightarrow{AP}=\frac{4}{5}\overrightarrow{AM}+\frac{1}{5}\overrightarrow{AC}$$
よって　$\overrightarrow{AP}=\dfrac{2}{5}\overrightarrow{AB}+\dfrac{1}{5}\overrightarrow{AC}$
A, P, Q は一直線上にあるので
$\overrightarrow{AQ}=k\overrightarrow{AP}$
$=\dfrac{2}{5}k\overrightarrow{AB}+\dfrac{1}{5}k\overrightarrow{AC}$ ……①
BQ : QC $=(1-s):s$ とすると
$\overrightarrow{AQ}=s\overrightarrow{AB}+(1-s)\overrightarrow{AC}$ ……②
$\overrightarrow{AB}$ と $\overrightarrow{AC}$ は，$\vec{0}$ でなく平行ではないので，①，②から
$$\begin{cases}s=\dfrac{2}{5}k\ \cdots\cdots③\\[2mm] 1-s=\dfrac{1}{5}k\ \cdots\cdots④\end{cases}$$
③，④ より $1-\dfrac{2}{5}k=\dfrac{1}{5}k$
$$\frac{3}{5}k=1$$
$$k=\frac{5}{3}$$
①に戻して
$\underline{\underline{\overrightarrow{AQ}=\frac{2}{3}\overrightarrow{AB}+\frac{1}{3}\overrightarrow{AC}}}$

数学III ｜ I型 ／ ｜ II型 ／ ｜ III型 必修

【12】

$\dfrac{dx}{dt}=-3\sin t\cos^2 t$，　$\dfrac{dy}{dt}=3\sin^2 t\cos t$ より
$$\frac{dy}{dx}=\frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}}=\frac{3\sin^2 t\cos t}{-3\sin t\cos^2 t}=\underline{\underline{-\tan t}}$$

数学Ⅲ　Ⅰ型 ／　Ⅱ型 ／　Ⅲ型 必修

【13】

(i) $y' = \dfrac{(x^2)'e^x - x^2(e^x)'}{(e^x)^2} = \dfrac{x(2-x)}{e^x}$ より，

$y' = 0$ となるのは $x = 0$，2のときである。

よって，増減表は以下の通り。

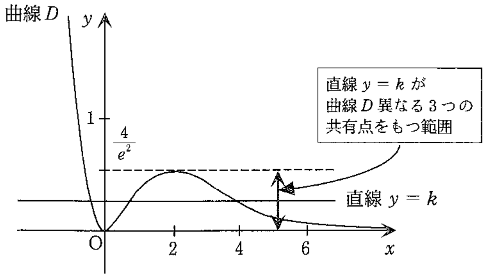
x	……	0	……	2	……
y'	$-$	0	$+$	0	$-$
y	↘	0	↗	$\dfrac{4}{e^2}$	↘

ゆえに求める極値は

極大値 $\dfrac{4}{e^2}$ $(x = 2)$，極小値 0 $(x = 0)$

(ii) $\displaystyle\lim_{x\to-\infty} \frac{x^2}{e^x} = +\infty$，$\displaystyle\lim_{x\to\infty} \frac{x^2}{e^x} = 0$ より曲線 D の

グラフは下図のようになる。



求める範囲は $0 < k < \dfrac{4}{e^2}$

数学Ⅲ　Ⅰ型 ／　Ⅱ型 ／　Ⅲ型 選択　Ⅲ型の選択は，次より3題選択【2b】【6c】【10b】【11b】【14】【15】【16】

【14】

(1) $\displaystyle\lim_{x\to0} \frac{x\tan x}{1-\cos x}$

$\displaystyle= \lim_{x\to0} \frac{x\tan x(1+\cos x)}{(1-\cos x)(1+\cos x)}$

$\displaystyle= \lim_{x\to0} \frac{x\tan x + x\sin x}{\sin^2 x}$

$\displaystyle= \lim_{x\to0}\left(\frac{x}{\sin x\cos x} + \frac{x}{\sin x}\right)$

$= 2$

(2) 部分積分を用いて，

$\displaystyle\int_1^{e^2} x^2 \log x\,dx$

$\displaystyle= \left[\frac{1}{3}x^3\log x\right]_1^{e^2} - \frac{1}{3}\int_1^{e^2} x^2 dx$

$\displaystyle= \frac{1}{3}e^6\log e^2 - 0 - \frac{1}{3}\left[\frac{1}{3}x^3\right]_1^{e^2}$

$\displaystyle= \frac{2}{3}e^6 - \frac{1}{9}(e^6-1)$

$\displaystyle= \frac{5e^6+1}{9}$

数学C　Ⅰ型 ／　Ⅱ型 ／　Ⅲ型 選択　Ⅲ型の選択は，次より3題選択【2b】【6c】【10b】【11b】【14】【15】【16】

【15】

(1) $AX = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & 3 \\ b & 4 \end{pmatrix}$

$= \begin{pmatrix} a-2b & -5 \\ 2a-b & 2 \end{pmatrix}$

$XA = \begin{pmatrix} a & 3 \\ b & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$

$= \begin{pmatrix} a+6 & -2a-3 \\ b+8 & -2b-4 \end{pmatrix}$

各成分を比較して，$a = 1$，$b = -3$

(2) $y^2 - 6y - 4x + 9 = 0$ を変形して $(y-3)^2 = 4x$

これは放物線 $y^2 = 4x$ を y 軸方向に3

平行移動したものである。

$y^2 = 4x$ の焦点は $(1,\ 0)$，準線は $x = -1$

であるから，求める焦点は $(1,\ 3)$，

準線は $x = -1$ である。

数学　Ⅰ型 ／　Ⅱ型 ／　Ⅲ型 選択　Ⅲ型の選択は，次より3題選択【2b】【6c】【10b】【11b】【14】【15】【16】

【16】

(1) 無限級数 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+2)}$ の第 n 項の部分和は，

$\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+2)}$

$\displaystyle= \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{2}\left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+2}\right)$

$\displaystyle= \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+2}\right)$

$\displaystyle= \frac{1}{2}\left\{\left(\frac{1}{1} - \frac{1}{3}\right) + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{4}\right) + \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{5}\right) + \cdots\right.$

$\displaystyle+ \left(\frac{1}{n-2} - \frac{1}{n}\right) + \left(\frac{1}{n-1} - \frac{1}{n+1}\right)$

$\displaystyle\left.+ \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+2}\right)\right\}$

$\displaystyle= \frac{1}{2}\left(\frac{1}{1} + \frac{1}{2} - \frac{1}{n+1} - \frac{1}{n+2}\right)$

よって

$\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+2)}$

$\displaystyle= \lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+2)}$

$\displaystyle= \lim_{n\to\infty}\frac{1}{2}\left(\frac{1}{1} + \frac{1}{2} - \frac{1}{n+1} - \frac{1}{n+2}\right)$

$\displaystyle= \frac{1}{2}\left(\frac{1}{1} + \frac{1}{2} - 0 - 0\right)$

$\displaystyle= \frac{3}{4}$

(2) $A - kE = \begin{pmatrix} 4-k & -3 \\ 2 & -1-k \end{pmatrix}$

一般に，行列 $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ が逆行列をもたないための

必要十分条件は $ad - bc = 0$ であるから，

$(4-k)(-1-k) - (-3)\cdot 2 = 0$

整理すると

$(k-1)(k-2) = 0$

よって，$k = 1,\ 2$