平成19年度　秋季県下一斉学力テスト $\boxed{\text{S II }\alpha}$ 解答 No.1

[α − 1] 式と証明・高次方程式

(1) $\dfrac{2x-4}{x^2+x-6}=\dfrac{2(x-2)}{(x-2)(x+3)}=\underline{\underline{\dfrac{2}{x+3}}}$

(2) $(1+2i)(3-i)=3-i+6i-2i^2=\underline{\underline{5+5i}}$

(3)
$$\begin{array}{r}
2x^2+1\\
x-3\,\overline{)\,2x^3-6x^2+x+1}\\
\underline{2x^3-6x^2}\\
x+1\\
\underline{x-3}\\
4
\end{array}$$
商 $\underline{\underline{2x^2+1}}$　余り $\underline{\underline{4}}$

(4) $f(x)=x^3-2x^2-x+2$ とおくと，
$f(1)=1^3-2\cdot1^2-1+2=0$ より
$f(x)$ は $(x-1)$を因数にもつ。
よって，
$f(x)=(x-1)(x^2-x-2)=(x-1)(x+1)(x-2)$
以上より $f(x)=x^3-2x^2-x+2=0$ を解くと
$\underline{\underline{x=1,\ -1,\ 2}}$

【別解】
$x^3-2x^2-x+2=x^2(x-2)-(x-2)$
$=(x^2-1)(x-2)=(x+1)(x-1)(x-2)$
以上より $\underline{\underline{x=1,\ -1,\ 2}}$

(5) 左辺
$=(x-a)(x-1)$
$=x^2+(-a-1)x+a$
右辺
$=x^2+4x-5$
係数を比較して
$-a-1=4,\ a=-5$
よって $\underline{\underline{a=-5}}$

[α − 2] 図形と方程式

(1) 2点 A$(a,\ 2)$, B$(4,\ 6)$ を結ぶ線分 AB の中点Mの座標は，
$\left(\dfrac{a+4}{2},\ \dfrac{2+6}{2}\right)$ となるが，これが $(0,\ 4)$に等しい。
x座標の値に着目して，$\dfrac{a+4}{2}=0$，
ゆえに $\underline{\underline{a=-4}}$

(2) $y=2x$ に平行な直線の傾きは2であるから，
求める直線の方程式は $y-3=2(x-4)$
ゆえに $y=2(x-4)+3$
よって，$\underline{\underline{y=2x-5}}$

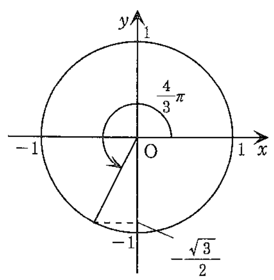
(3) 求める円の方程式は半径をrとおくと，
$\{x-(-5)\}^2+(y-0)^2=r^2$
$(x+5)^2+y^2=r^2$ … ①
①は原点 $(0,\ 0)$ を通るので
$(0+5)^2+0^2=r^2$
$r^2=25$
①に代入して
$\underline{\underline{(x+5)^2+y^2=25}}$

(4) $x^2+y^2\leqq1$ … ① が表す領域は，
円 $x^2+y^2=1$ の内部とその境界線である。
また，$y\geqq x+1$ … ② が表す領域は，
直線 $y=x+1$ で分割される2つの領域のうち原点を含まない側とその境界線である。
以上より ①，②の共通部分は $\underline{\underline{(ウ)}}$

(5) 点P$(x,\ y)$ とおく。CP $=3$ の両辺を平方して，
$\mathrm{CP}^2=9$ よって $(x-4)^2+\{y-(-2)\}^2=9$
ゆえに，$\underline{\underline{(x-4)^2+(y+2)^2=9}}$

[α − 3] 三角関数

(1) 右図より
$\sin\dfrac{4}{3}\pi=\underline{\underline{-\dfrac{\sqrt{3}}{2}}}$



(2) 半径rで中心角θの扇形の面積Sは，$S=\dfrac{1}{2}r^2\theta$
$\theta=\alpha,\ r=4$ より
$4\pi=\dfrac{1}{2}\times4^2\times\alpha$
よって，$\alpha=\underline{\underline{\dfrac{\pi}{2}}}$

(3) $420^\circ=60^\circ+360^\circ=\alpha+2\pi$ より，
$\alpha=60^\circ=\dfrac{\pi}{180^\circ}\times60^\circ=\underline{\underline{\dfrac{\pi}{3}}}$

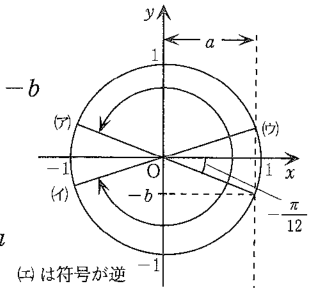
(4) $-\dfrac{\pi}{12}$ の動径と単位円の交点をあらわす
点の座標を $(a,\ -b)(a>0,\ b>0)$ とすると，
$\cos\left(-\dfrac{\pi}{12}\right)=a$

(ア) $\sin\dfrac{11}{12}\pi=b$

(イ) $\sin\left(-\dfrac{11}{12}\pi\right)=-b$

(ウ) $\cos\dfrac{\pi}{12}=a$

(エ) $-\cos\dfrac{\pi}{12}=-a$



よって一致するのは $\underline{\underline{(ウ)}}$

(5) $\sin75^\circ=\sin(45^\circ+30^\circ)$
$=\sin45^\circ\cdot\cos30^\circ+\cos45^\circ\cdot\sin30^\circ$
$=\dfrac{\sqrt{2}}{2}\cdot\dfrac{\sqrt{3}}{2}+\dfrac{\sqrt{2}}{2}\cdot\dfrac{1}{2}$
$=\dfrac{\sqrt{6}}{4}+\dfrac{\sqrt{2}}{4}=\dfrac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$
よって，$\underline{\underline{a=6,\ b=2}}$　($a=2,\ b=6$　も可)

[α − 4] 指数関数・対数関数

(1) $\sqrt[3]{2}\times\sqrt[3]{32}$
$=\sqrt[3]{64}$
$=\sqrt[3]{4^3}$
$=\underline{\underline{4}}$

(2) $3^{-2x+1}=27$
$3^{-2x+1}=3^3$
であるから，
$-2x+1=3$
$-2x=2$　よって $\underline{\underline{x=-1}}$

(3) $\log_3\dfrac{1}{9}=\log_3\dfrac{1}{3^2}$
$=\log_3 3^{-2}=-2\log_3 3$
$=-2\times1=\underline{\underline{-2}}$

(4) $2\log_2 10-\log_2 25$
$=\log_2 10^2-\log_2 25$
$=\log_2 100-\log_2 25$
$=\log_2\dfrac{100}{25}=\log_2 4=\log_2 2^2$
$=2\log_2 2=2\times1=\underline{\underline{2}}$

(5) 真数は正であるから，$x>0$ …①
$\log_3 x>4\log_3 3$
$\log_3 x>\log_3 3^4$
$\log_3 x>\log_3 81$
底が3で1より大きいので
$x>81$ …②
①，②より
$\underline{\underline{x>81}}$

[α − 5] 微分・積分の考え

(1) $y=-x^3+5x^2-2x+1$ より
$y'=-3x^2+5\cdot2x-2\cdot1$
$=\underline{\underline{-3x^2+10x-2}}$

(2) $f(x)=3x^2$ より，$f'(x)=6x$
以上より $f'(2)=6\cdot2=\underline{\underline{12}}$

(3) $x=1$ から $x=3$ まで変化するときの
平均変化率は
$\dfrac{f(3)-f(1)}{3-1}=\dfrac{(3^2+2)-(1^2+2)}{2}=\dfrac{11-3}{2}=\underline{\underline{4}}$

(4) $f(x)=x^2-2x$ とおくと，$f'(x)=2x-2$
点 $(0,\ 0)$ における接線の方程式は，その傾きが
$f'(0)=2\cdot0-2=-2$ なので，求める接線の方程式は $\underline{\underline{y=-2x}}$

(5) $y=x^3-3x^2+1$ を微分して
$y'=3x^2-6x=3x(x-2)$
$y'=0$ となるのは $x=0,\ 2$ のときであり，
以上より増減表は下記のようになる。

x	……	0	……	2	……
y'	+	0	−	0	+
y	↗	極大	↘	極小	↗

よって　$\underline{\underline{(ア)\ 0\quad(イ)\ 2}}$

平成19年度　秋季県下一斉学力テスト $\boxed{\mathrm{S\,II}\,\alpha}$ 解答 No. 2

[α － 6] 式と証明・高次方程式
(等式の証明，不等式の証明は除く)

(1) $(1+\sqrt{-4})(1-\sqrt{-9}) = (1+2i)(1-3i)$
$= 1-3i+2i+6 = \underline{\underline{7-i}}$

(2) $\dfrac{x^2+6}{x+2}+\dfrac{5x}{x+2} = \dfrac{x^2+5x+6}{x+2}$
$= \dfrac{(x+2)(x+3)}{x+2} = \underline{\underline{x+3}}$

(3) $x^2+ax+b=0$ に $x=i$ を代入すると，
$i^2+ai+b=0$，$(-1+b)+ai=0$
$-1+b$，a は実数なので，$-1+b=0$，$a=0$
よって，$\underline{\underline{a=0,\ b=1}}$

(4) $x^2+3x+5=0$ の2つの解を α，β とする。
解と係数の関係から
$\alpha+\beta=-3$
$\alpha\beta=5$
よって，$\alpha\beta(\alpha+\beta)=5\times(-3)=\underline{\underline{-15}}$

(5) $2x^2-5x+k=0$ が異なる2つの虚数解をもつには
$D<0$ であればよい。
$D=(-5)^2-4\cdot 2\cdot k=25-8k<0$
ゆえに，$8k>25$，$\underline{\underline{k>\dfrac{25}{8}}}$

[α － 7] 図形と方程式 (軌跡と領域は除く)

(1) 2点 A(4, 2)，B(2, 1) 間の距離 AB について
$\mathrm{AB}=\sqrt{(2-4)^2+(1-2)^2}=\sqrt{4+1}=\underline{\underline{\sqrt{5}}}$

(2) A(5, 0)，B(2, 3) を結ぶ線分 AB を 1 : 2 に内分する点 C について
$\mathrm{C}\left(\dfrac{2\cdot 5+1\cdot 2}{1+2},\ \dfrac{2\cdot 0+1\cdot 3}{1+2}\right)$ より $\underline{\underline{\mathrm{C}(4,\ 1)}}$

(3) 2点 A(1, 2)，B(3, 5) を通る直線の傾きは
$\dfrac{5-2}{3-1}=\dfrac{3}{2}$ で，点 A(1, 2) を通るから
求める直線の方程式は
$y-2=\dfrac{3}{2}(x-1)$ ゆえに $\underline{\underline{y=\dfrac{3}{2}x+\dfrac{1}{2}}}$

(4) $x^2-2x+y^2-3=0$
$x^2-2x+1+y^2=3+1$
$(x-1)^2+y^2=4$
よって $(x-1)^2+y^2=2^2$
以上より $\underline{\underline{中心\ (1,\ 0)，半径\ 2}}$

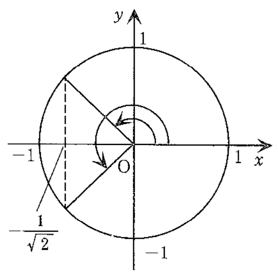
(5) A(1, 2)，C(5, 8)の中点をM，
B(4, 3)，D(2, a) の中点をNとおくと
$\mathrm{M}\left(\dfrac{1+5}{2},\ \dfrac{2+8}{2}\right)$ より M(3, 5)
$\mathrm{N}\left(\dfrac{4+2}{2},\ \dfrac{3+a}{2}\right)$ より $\mathrm{N}\left(3,\ \dfrac{3+a}{2}\right)$
四角形 ABCD は平行四辺形であるから対角線の中点MとNは一致する。
よって，$\dfrac{3+a}{2}=5$，$\underline{\underline{a=7}}$

[α － 8] 三角関数 (加法定理は除く)

(1) (ア) -150° ・・・第3象限
(イ) -50° ・・・第4象限
(ウ) 100° ・・・第2象限
(エ) 200° ・・・第3象限
よって同じ象限にあるのは $\underline{\underline{(ア)と(エ)}}$

(2) $\sin^2\theta+\cos^2\theta=1$ であるから
$(-1)^2+\cos^2\theta=1$
$\cos^2\theta=0$
よって，$\cos\theta=\underline{\underline{0}}$

(3) 求める角 θ の動径は
下図のようになるので
$\pi\leqq\theta<2\pi$ を満たすのは
$\theta=\underline{\underline{\dfrac{5}{4}\pi}}$



(4) $\sin\theta+\cos\theta=\dfrac{1}{2}$ の両辺を2乗する
$\sin^2\theta+2\sin\theta\cos\theta+\cos^2\theta=\dfrac{1}{4}$
$\sin^2\theta+\cos^2\theta=1$ より
$1+2\sin\theta\cos\theta=\dfrac{1}{4}$
$2\sin\theta\cos\theta=-\dfrac{3}{4}$
よって $\sin\theta\cos\theta=\underline{\underline{-\dfrac{3}{8}}}$

(5) グラフより値域が $-2\leqq y\leqq 2$
よって $y=\sin\theta$ を y 軸方向に2倍に拡大した形の(イ)または(エ)のどちらかであることは明らか。
θ 軸との交点の位置から
グラフは $y=2\sin\theta$ を θ 軸方向に $\dfrac{\pi}{3}$ 平行移動して得られるものであるから
$y=2\sin\left(\theta-\dfrac{\pi}{3}\right)$
つまり $\underline{\underline{(エ)}}$

[α － 9] 指数関数・対数関数 (対数関数は除く)

(1) $5^{-2}=\dfrac{1}{5^2}=\underline{\underline{\dfrac{1}{25}}}$

(2) $3^{\frac{7}{10}}\div 3^{\frac{1}{5}}=3^{\frac{7}{10}-\frac{1}{5}}=3^{\frac{7}{10}-\frac{2}{10}}$
$=3^{\frac{5}{10}}=3^{\frac{1}{2}}=\underline{\underline{\sqrt{3}}}$

(3) $2^{x+1}<4$
$2^{x+1}<2^2$
底が2で1より大きいので
$x+1<2$
$\underline{\underline{x<1}}$

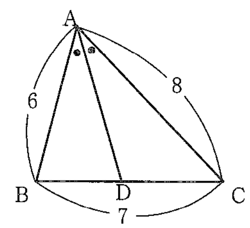
(4) $10=10^1$，$\left(\dfrac{1}{10}\right)^2=\dfrac{1}{10^2}=10^{-2}$
底が10で1より大きいので
$10^{-3}<10^{-2}<10^1$
よって $\underline{\underline{10^{-3},\ \left(\dfrac{1}{10}\right)^2,\ 10}}$

(5) 与えられたグラフから $y>0$ なので(イ)，(エ)は不適
x の値が増加するときは y の値は減少しているので(ア)は不適。よって $\underline{\underline{(ウ)}}$

[α － 10] 平面図形

(1) 三角形の3辺の垂直二等分線の交点は，外接円の中心である。よって，$\underline{\underline{外心}}$

(2) 角の二等分線と線分の比の性質より
BD : DC = AB : AC = 6 : 8 = 3 : 4
よって
$\mathrm{BD}=7\times\dfrac{3}{3+4}=7\times\dfrac{3}{7}=\underline{\underline{3}}$



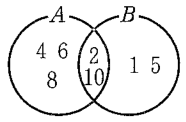
(3) 円に内接する四角形の対角の和は 180° であるから
$\alpha=\angle\mathrm{BAD}=180^\circ-\angle\mathrm{BCD}=180^\circ-84^\circ=\underline{\underline{96^\circ}}$

(4) 同じ弧 BC に対する円周角は等しいので
$\angle\mathrm{BAC}=\angle\mathrm{BDC}=25^\circ$
$\triangle\mathrm{ABP}$ において，$\angle\mathrm{APB}$ の外角が
$\angle\mathrm{APD}$ となるから
$\alpha=\angle\mathrm{APD}=\angle\mathrm{ABP}+\angle\mathrm{BAP}=70^\circ+25^\circ=\underline{\underline{95^\circ}}$

(5) 円の接線と弦のつくる角の性質より
$\angle\mathrm{CAP}=\angle\mathrm{CDA}=120^\circ$
$\triangle\mathrm{CAP}$ の内角の和は 180° であるから，
$\alpha=\angle\mathrm{CPA}$
$=180^\circ-(\angle\mathrm{CAP}+\angle\mathrm{ACP})$
$=180^\circ-(120^\circ+40^\circ)$
$=\underline{\underline{20^\circ}}$

［α－11］集合と論理

(1)



$A \cup B = \{1, 2, 4, 5, 6, 8, 10\}$

(2) 1から200までの整数で，6の倍数の集合を A，8の倍数の集合を B とする。
$A = \{6\times1, 6\times2, \cdots, 6\times33\}$ より
A の要素の個数 $n(A) = 33$
$B = \{8\times1, 8\times2, \cdots, 8\times25\}$ より
B の要素の個数 $n(B) = 25$
また，$A \cap B$ は24の倍数の集合なので，
$A \cap B = \{24\times1, 24\times2, \cdots, 24\times8\}$ より
$A \cap B$ の要素の個数 $n(A \cap B) = 8$
求める個数は，$A \cup B$ の要素の個数なので，
$n(A \cup B) = n(A) + n(B) - n(A \cap B)$
$= 33 + 25 - 8$
$= 50$（個）

(3) （反例）$x = -3$ のとき
$x^2 = 9$ では成り立つが，$x = 3$ ではない。

(4) 9の正の約数は $\{1, 3, 9\}$ である。
9以下の正の奇数は $\{1, 3, 5, 7, 9\}$ である。
命題「9の正の約数ならば9以下の正の約数である。」は真である。
命題「9以下の正の約数ならば9の正の約数である。」は偽である。
したがって，
(イ)十分条件であるが必要条件ではない。

(5) 命題「$x + y = 3$ ならば，$x = 2$ かつ $y = 1$ である。」の対偶は，
「$x \neq 2$ または $y \neq 1$ ならば，$x + y \neq 3$ である。」

［α－12］場合の数と確率

(1) 大きいさいころの目が5以上となるのは2通り，
小さいさいころの目が3以下となるのは3通り。
積の法則を使って，
$2\times3 = 6$（通り）

(2) 10人の中から3人を選んで並べる順列であるから
${}_{10}P_3 = 10\times9\times8 = 720$（通り）

(3) ${}_8C_5 = {}_8C_{8-5} = {}_8C_3 = \dfrac{8\cdot7\cdot6}{3\cdot2\cdot1} = 56$

(4) 1個のさいころを2回投げるとき，目の出方は
$6\times6 = 36$（通り）
そのうち，2回とも1の目が出る場合は
$1\times1 = 1$（通り）
求める確率は $\dfrac{1}{36}$

(5) 8本のくじから同時に2本のくじを引く場合は ${}_8C_2$ 通りで，そのうち当たりくじとはずれくじが1本ずつである場合は ${}_3C_1\times{}_5C_1$ 通りあるから
求める確率は
$\dfrac{{}_3C_1\times{}_5C_1}{{}_8C_2} = \dfrac{15}{28}$

［α－13］場合の数と確率（確率は除く）

(1) ${}_5P_3 = 5\times4\times3 = 60$

(2) $72 = 2^3\times3^2$ であるから，
72の正の約数は，2^3 の正の約数と，
3^2 の正の約数の積で表される。
2^3 の正の約数は，1，2，2^2，2^3 の4個
3^2 の正の約数は，1，3，3^2 の3個である。
したがって，72の正の約数の個数は，
積の法則により $4\times3 = 12$（個）

(3) 6文字の中から3文字を選ぶ組合せだから
${}_6C_3 = \dfrac{6\times5\times4}{3\times2\times1} = 20$（通り）

(4) 5人の円順列だから
$\dfrac{5!}{5} = 4! = 4\times3\times2\times1 = 24$（通り）

(5) 図の上で，右に進むことを→，上に進むことを↑で表すと，AからBに最短距離で行く方法は，5個の→と，3個の↑を1列に並べる順列の総数に等しい。
したがって，その総数は
$\dfrac{8!}{5!3!} = 56$（通り）

［α－14］方程式と不等式

(1) $2a^2b^3\times(-ab^2)^2$
$= 2a^2b^3\times a^2b^4$
$= 2a^4b^7$

(2) $(2x-y)^2(2x+y)^2$
$= \{(2x-y)(2x+y)\}^2$
$= (4x^2-y^2)^2$
$= 16x^4-8x^2y^2+y^4$

(3) $2x^2y+4xy-30y$
$= 2y(x^2+2x-15)$
$= 2y(x+5)(x-3)$

(4) $2-x < \dfrac{2x+1}{3}$
両辺に3をかけて
$3(2-x) < 2x+1$
$6-3x < 2x+1$
$-5x < -5$
$x > 1$

(5) $D = (-6)^2-4\cdot(-3m)$
$= 36+12m$
重解を持つとき $D = 0$ なので
$36+12m = 0$
$12m = -36$
$m = -3$

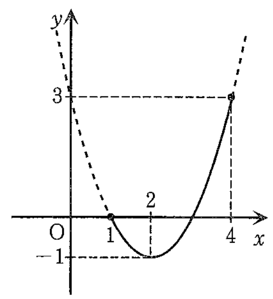
［α－15］2次関数

(1) 2次関数 $y = ax^2$ のグラフを x 軸方向に p，y 軸方向に q だけ平行移動したものは，2次関数 $y = a(x-p)^2+q$ であるから，$p = 3$，$q = 5$
よって ① 3 ② 5

(2) 2次関数 $y = \dfrac{1}{2}(x-1)^2-5$ のグラフの頂点の座標は，$(1, -5)$

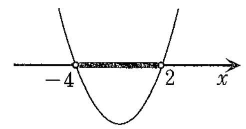
(3) $D = 3^2-4\times1\times2$
$= 1 > 0$
したがって，x軸との共有点の個数は2個

(4) $y = x^2-4x+3$ を変形すると
$y = (x-2)^2-1$ となるので，
2次関数 $y = x^2-4x+3$ の $1 \leqq x \leqq 4$ における
グラフは図のようになる。



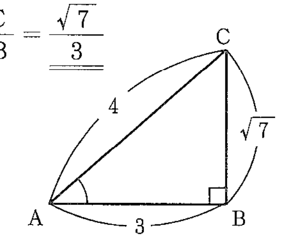
よって，$x = 2$ のとき
最小値 -1

(5) $(x+4)(x-2) < 0$ より
$-4 < x < 2$



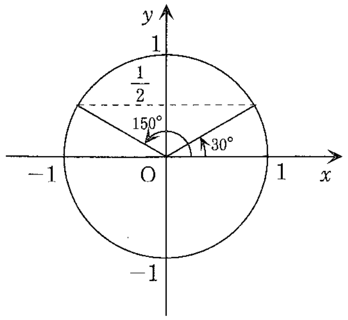
［α－16］図形と計量

(1) 図より $\tan A = \dfrac{BC}{AB} = \dfrac{\sqrt{7}}{3}$



(2) $\sin 120^\circ \times \cos 30^\circ$
$= \dfrac{\sqrt{3}}{2}\times\dfrac{\sqrt{3}}{2}$
$= \dfrac{3}{4}$

(3)



上図より，$\theta = 30^\circ,\ 150^\circ$

(4) △ABC の面積を S とすると

$$S = \frac{1}{2} \times \mathrm{AB} \times \mathrm{BC} \times \sin B$$

$$S = \frac{1}{2} \times 4 \times 3\sqrt{2} \times \sin 135^\circ$$

$$= \frac{1}{2} \times 4 \times 3\sqrt{2} \times \frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$= 6$$

(5) 余弦定理より

$$\mathrm{BC}^2 = \mathrm{AB}^2 + \mathrm{CA}^2 - 2 \times \mathrm{AB} \times \mathrm{CA} \times \cos \angle \mathrm{A}$$

$$= 3^2 + 5^2 - 2 \times 3 \times 5 \times \cos 120^\circ$$

$$= 9 + 25 - 2 \times 3 \times 5 \times \left(-\frac{1}{2}\right)$$

$$= 9 + 25 + 15$$

$$= 49$$

BC ＞ 0 より

$$\mathrm{BC} = 7$$

平成19年度　秋季県下一斉学力テスト $\boxed{\text{S}\,\text{II}\,\beta}$ 解答 No. 1

β共通問題

(1) $\dfrac{2}{a^2-1}-\dfrac{1}{a^2+a}$

$=\dfrac{2}{(a+1)(a-1)}-\dfrac{1}{a(a+1)}$

$=\dfrac{2a-(a-1)}{a(a+1)(a-1)}$

$=\dfrac{a+1}{a(a+1)(a-1)}$

$=\underline{\underline{\dfrac{1}{a(a-1)}}}$

(2) $(2+3i)(a+bi)=7+4i$

$2a+2bi+3ai+3bi^2=7+4i$

$(2a-3b)+(3a+2b)i=7+4i$

a, b は実数であるから，$2a-3b$，$3a+2b$ もともに実数である。

よって $\begin{cases}2a-3b=7\\3a+2b=4\end{cases}$ が成り立つ。

これを解いて $\underline{\underline{a=2,\ b=-1}}$

(3) $P(x)=x^3-7x^2+14x-8$ とおく。

$P(1)=0$ だから $P(x)$ は $x-1$ を因数にもつ。

$$\begin{array}{r}
x^2-6x+8 \\
x-1\,\big)\,\overline{x^3-7x^2+14x-8} \\
\underline{x^3-x^2} \\
-6x^2+14x \\
\underline{-6x^2+\ \ 6x} \\
8x-8 \\
\underline{8x-8} \\
0
\end{array}$$

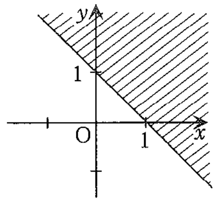
$P(x)=(x-1)(x^2-6x+8)=(x-1)(x-2)(x-4)$

よって方程式は $(x-1)(x-2)(x-4)=0$

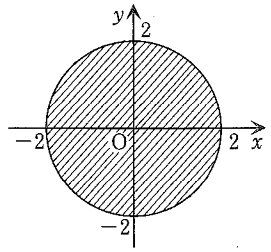
したがって $\underline{\underline{x=1,\ 2,\ 4}}$

(4) 問題の図は

$y\geqq -x+1$　　　$x^2+y^2\leqq 4$



と



の共通部分であるから $\underline{\underline{\begin{cases}y\geqq -x+1\\x^2+y^2\leqq 4\end{cases}}}$

(5) $(x-2)+y^2=1$ に $y=mx$ を代入する。

$(x-2)^2+(mx)^2=1$

$(m^2+1)x^2-4x+3=0$ … ①

この2次方程式の判別式を D とすると

$D=(-4)^2-4(m^2+1)\times 3$

$\quad=4-12m^2$

円と直線が接するので

$D=0$

$4-12m^2=0$

$m^2=\dfrac{1}{3}$，$m>0$ より

$m=\dfrac{1}{\sqrt{3}}=\dfrac{\sqrt{3}}{3}$

① に代入すると

$\dfrac{4}{3}x^2-4x+3=0$

$4x^2-12x+9=0$

$(2x-3)^2=0$ より

$x=\dfrac{3}{2}$，またこれと $m=\dfrac{\sqrt{3}}{3}$ を

$y=mx$ に代入して

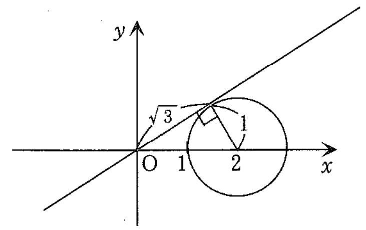
$y=\dfrac{\sqrt{3}}{3}\times\dfrac{3}{2}=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$

したがって接点の座標は $\left(\dfrac{3}{2},\ \dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)$

この接点と原点 $(0,\ 0)$ との距離は

$\sqrt{\left(\dfrac{3}{2}-0\right)^2+\left(\dfrac{\sqrt{3}}{2}-0\right)^2}=\underline{\underline{\sqrt{3}}}$

【別解】図より $\underline{\underline{\sqrt{3}}}$



(6) 2点A$(5,\ -4)$，B$(1,\ 4)$ を通る直線の方程式は

$y-4=\dfrac{4-(-4)}{1-5}(x-1)$

よって $y=-2x+6$

点C$(a,\ -8)$ がこの直線上にあるための条件は

$-8=-2a+6$

よって，$\underline{\underline{a=7}}$

(7) 点Pの座標を $(x,\ y)$ とする。

$\text{AP}=2\text{BP}$ より $\text{AP}^2=4\text{BP}^2$

したがって $(x+1)^2+y^2=4(x-2)^2+4y^2$

$x^2+2x+1+y^2=4(x^2-4x+4)+4y^2$

$3x^2-18x+15+3y^2=0$

整理すると

$x^2-6x+5+y^2=0$

$(x-3)^2+y^2=4$ … ①

逆に，① 上のすべての点は等式 $\text{AP}=2\text{BP}$ を満たす。

よって，点Pの軌跡の方程式は $\underline{\underline{(x-3)^2+y^2=4}}$

(8)(ア) 証明

$(a^2+2b^2+1)-(2ab+2b)$

$=a^2-2ab+b^2+b^2-2b+1$

$=(a-b)^2+(b-1)^2$

$(a-b)^2\geqq 0$，$(b-1)^2\geqq 0$ だから

$(a-b)^2+(b-1)^2\geqq 0$

よって，$a^2+2b^2+1\geqq 2ab+2b$

(イ) (ア)より等号が成り立つのは

$(a-b)^2=0$，$(b-1)^2=0$

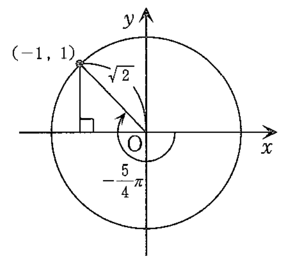
すなわち $a=b$，$b=1$

よって，$\underline{\underline{a=1,\ b=1}}$

β選択問題

［β−1］三角関数

(1) $\sin\left(-\dfrac{5}{4}\pi\right)=\underline{\underline{\dfrac{1}{\sqrt{2}}}}\left(=\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right)$



(2) $1+\tan^2\theta=\dfrac{1}{\cos^2\theta}$ より $1+(-2)^2=\dfrac{1}{\cos^2\theta}$

$\cos^2\theta=\dfrac{1}{5}$，$\theta$ は第2象限の角だから $\cos\theta<0$

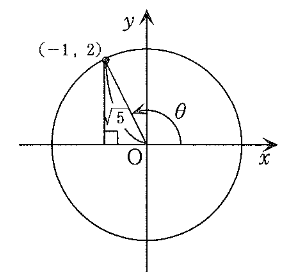
よって $\cos\theta=\underline{\underline{-\dfrac{1}{\sqrt{5}}}}$

【別解】

$\tan\theta=-2=\dfrac{2}{-1}=\dfrac{y}{x}$

$r=\sqrt{x^2+y^2}=\sqrt{(-1)^2+2^2}=\sqrt{5}$

$\cos\theta=\dfrac{x}{r}=\underline{\underline{-\dfrac{1}{\sqrt{5}}}}\left(=-\dfrac{\sqrt{5}}{5}\right)$



(3) $\cos 2\theta+3\sin\theta-1=0$

2倍角の公式を用いると

$1-2\sin^2\theta+3\sin\theta-1=0$

$2\sin^2\theta-3\sin\theta=0$

左辺を因数分解して $\sin\theta(2\sin\theta-3)=0$ … ①

ここで $-1\leqq\sin\theta\leqq 1$ より $-2\leqq 2\sin\theta\leqq 2$

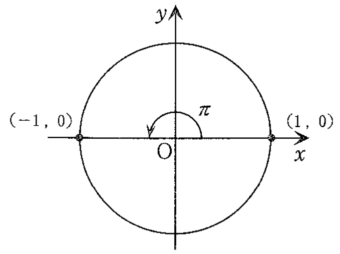
したがって $2\sin\theta-3\neq 0$

等式 ① が成り立つのは $\sin\theta=0$ のときである。

$0\leqq\theta<2\pi$ のとき $\sin\theta=0$ となるのは

$\underline{\underline{\theta=0,\ \pi}}$

平成19年度　秋季県下一斉学力テスト $\boxed{\text{SⅡ}\beta}$ 解答 No. 2



(4) $y=\sin x+\sqrt{3}\cos x$ … ①

点P$(1,\ \sqrt{3})$ をとると,

$\mathrm{OP}=\sqrt{1^2+(\sqrt{3})^2}=2$

動径OPの表す角は $\frac{\pi}{3}$

したがって①は

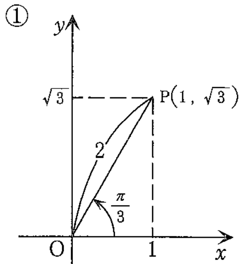
$y=2\sin\left(x+\frac{\pi}{3}\right)$

と変形される。

ここで $\sin\left(x+\frac{\pi}{3}\right)$ は

-1 から 1 までの値をとるから

y の最小値は -2



(5) $y=\sin(2x-\alpha)=\sin 2\left(x-\frac{\alpha}{2}\right)$ … ①

また，このグラフは $y=\sin 2x$ のグラフを

x 軸方向に $\frac{\pi}{6}$ だけ平行移動したものなので

①より $\frac{\alpha}{2}=\frac{\pi}{6}$

よって，$\alpha=\frac{\pi}{3}$

[β−2] 指数関数・対数関数

(1) $32^{\frac{3}{5}}=(2^5)^{\frac{3}{5}}=2^3=8$

(2) $3^{2x-1}=3^{-4}$, $2x-1=-4$, $x=-\frac{3}{2}$

(3) $\log_2 75=\log_2(3\times 5^2)=\log_2 3+2\log_2 5=a+2b$

(4) $(\log_5 3+\log_{25} 9)(\log_3 25-\log_9 5)$

$=\left(\log_5 3+\frac{\log_5 9}{\log_5 25}\right)\left(\log_3 25-\frac{\log_3 5}{\log_3 9}\right)$

$=\left(\log_5 3+\frac{2\log_5 3}{2\log_5 5}\right)\left(2\log_3 5-\frac{\log_3 5}{2\log_3 3}\right)$

$=\left(\log_5 3+\log_5 3\right)\left(2\log_3 5-\frac{\log_3 5}{2}\right)$

$=2\log_5 3\times\frac{3}{2}\log_3 5=2\times\frac{\log_3 3}{\log_3 5}\times\frac{3}{2}\log_3 5=3$

(5) 真数は正であるから, $x-4>0$

$x>4$ … ①

$\log_3(x-4)<2$, $\log_3(x-4)<\log_3 3^2$

底は1より大きいので $x-4<9$

$x<13$ … ②

①, ②より $4<x<13$

[β−3] 微分・積分の考え

(1) $f(x)=ax^2+bx+c$ より $f'(x)=2ax+b$

すると $f'(0)=-3$ より $b=-3$ … ①

$f'(1)=2a+b=1$ … ②

$f(2)=6$ より $4a+2b+c=6$ … ③

①, ②, ③より $a=2,\ b=-3,\ c=4$

(2) $\int_{-2}^{2}(2x^2-x+3)dx=2\int_0^2(2x^2+3)dx$

$=2\left[\frac{2}{3}x^3+3x\right]_0^2=2\left(\frac{2}{3}\times 2^3+3\times 2\right)$

$=2\times\frac{34}{3}=\frac{68}{3}$

(3) 放物線 $y=x^2-3x+2$ と

x 軸との交点の x 座標は

方程式 $x^2-3x+2=0$ の解であるから

$x=1,\ 2$

区間 $1\leqq x\leqq 2$ では $y\leqq 0$

なので求める面積は

$-\int_1^2(x^2-3x+2)dx$

$=-\left[\frac{1}{3}x^3-\frac{3}{2}x^2+2x\right]_1^2$

$=-\left\{\left(\frac{1}{3}\times 2^3-\frac{3}{2}\times 2^2+2\times 2\right)-\left(\frac{1}{3}-\frac{3}{2}+2\right)\right\}$

$=\frac{1}{6}$

【別解】

公式 $a\int_\alpha^\beta a(x-\alpha)(x-\beta)dx=-\frac{a}{6}(\beta-\alpha)^3$ より

$-\int_1^2(x^2-3x+2)dx=-\int_1^2(x-1)(x-2)dx$

$=\frac{1}{6}(2-1)^3=\frac{1}{6}$

(4) $f(x)=-x^3+6x^2-9x+6$ より

$f'(x)=-3x^2+12x-9=-3(x-1)(x-3)$

$f'(x)=0$ の解は $x=1,\ 3$

すると $1\leqq x\leqq 3$ における増減表をかくと次のようになる。

x	0	……	1	……	3
$f'(x)$		−	0	+	
$f(x)$	6	↘	2 極小	↗	6

極小値　$f(1)=-1+6-9+6=2$

よって $x=1$ のとき, 最小値2

(5) 放物線上の接点の座標を $(a,\ a^2)$ とする。

$y'=2x$ より接線の傾きは $2a$ である。

よって接線の方程式は

$y-a^2=2a(x-a)$ すなわち $y=2ax-a^2$

この接線は点 $(-2,\ 3)$ を通るから $3=-4a-a^2$

$a^2+4a+3=0$, $(a+1)(a+3)=0$

$a=-1,\ -3$

したがって, 接線の方程式は

$a=-1$ のとき $y=-2x-1$

$a=-3$ のとき $y=-6x-9$

[β−4] 式と証明・高次方程式

(1) $\frac{2+9i}{1+2i}=\frac{(2+9i)(1-2i)}{(1+2i)(1-2i)}$

$=\frac{2-4i+9i-18i^2}{1-4i^2}=\frac{20+5i}{5}=4+i$

よって $\left(\frac{2+9i}{1+2i}\right)^2=(4+i)^2=16+8i+i^2=15+8i$

(2) $x^2+ax+b=0$ に

$x=-3+2i$ を代入して,

$(-3+2i)^2+a(-3+2i)+b=0$

$(-3a+b+5)+(2a-12)i=0$

a, b は実数であるから

$-3a+b-5$, $2a-12$ は実数である。

したがって $\begin{cases}-3a+b+5=0\\ 2a-12=0\end{cases}$

これを解いて, $a=6,\ b=13$

(3) 2次方程式 $3x^2-6x+5=0$ の解と係数の関係より

$\alpha+\beta=-\frac{-6}{3}=2$, $\alpha\beta=\frac{5}{3}$

求める2次方程式の2つの解は 3α, 3β なので

$3\alpha+3\beta=3(\alpha+\beta)=3\times 2=6$

$3\alpha\cdot 3\beta=9\alpha\beta=9\times\frac{5}{3}=15$

よって, 3α, 3β を解とする

x の2次方程式は $x^2-6x+15=0$

(4) $P(x)=x^3-2ax^2+bx-6$ とおくと,

これを $x-2$ で割ったときの余りが6であるから

$P(2)=6$, $2^3-2a\times 2^2+b\times 2-6=6$

$8-8a+2b-6=6$, $-8a+2b=4$

$-4a+b=2$ … ①

また, $P(x)$ を $x+1$ で割ったときの余りが

-3 であるから $P(-1)=-3$

$(-1)^3-2a\times(-1)^2+b\times(-1)-6=-3$

$-1-2a-b-6=-3$, $2a+b=-4$ … ②

①, ②より $a=-1,\ b=-2$

(5) $\frac{3x-5}{(x+3)(2x-1)}=\frac{a(2x-1)+b(x+3)}{(x+3)(2x-1)}$

$3x-5=a(2x-1)+b(x+3)$

$3x-5=(2a+b)x+(-a+3b)$

x についての恒等式となるための条件は

$\begin{cases}2a+b=3\\ -a+3b=-5\end{cases}$

これを解いて $a=2,\ b=-1$

[β−5] 図形と方程式（軌跡と領域を除く）

(1) 直線ABの傾きは $\frac{2-1}{1-(-2)}=\frac{1}{3}$ であるから

直線ABに垂直な直線の傾きは -3

よって, 求める直線の方程式は

$y-2=-3(x-1)$

すなわち $y=-3x+5$

平成19年度　秋季県下一斉学力テスト $\boxed{\text{SⅡ}\beta}$ 解答 No.3

(2) 円の中心は線分ABの中点なので

$\left(\dfrac{5-3}{2},\ \dfrac{1-5}{2}\right)$ よって（1，−2）

また半径はA，B 2点間の距離の $\dfrac{1}{2}$ 倍なので

$\dfrac{1}{2}\times\sqrt{(-3-5)^2+(-5-1)^2}$

$=\dfrac{1}{2}\times\sqrt{64+36}$

$=5$

よって，求める円の方程式は

$(x-1)^2+(y+2)^2=25$

(3) 連立方程式

$\begin{cases} x-2y+1=0 \\ x+y-2=0 \end{cases}$

を解くと $x=1$，$y=1$

よって，この2直線の交点の座標は（1，1）

直線 $x+ay-7=0$ が点（1，1）を通るので

$1+a\times1-7=0$

$a-6=0$

$a=6$

(4) $x^2+y^2+4x-6y+c=0$

$x^2+4x+y^2-6y=-c$

$x^2+4x+4+y^2-6y+9=-c+4+9$

$(x+2)^2+(y-3)^2=-c+13$

この方程式が半径3の円を表すとき $-c+13=3^2$

ゆえに $c=4$

(5) $2x-y+k=0$ より

$y=2x+k$ …①

$x^2+y^2=5$ …②

①を②に代入

$x^2+(2x+k)^2=5$

$x^2+4x^2+4kx+k^2-5=0$

この2次方程式の判別式を D とすると

$D=(4k)^2-4\times5\times(k^2-5)$

$\quad=16k^2-20k^2+100$

$\quad=-4(k^2-25)$

直線と円が接するための必要十分条件は

$D=0$ であるから

$-4(k^2-25)=0$

$k^2=25$，よって，$k=\pm5$

【別解】

円の中心（0，0）と $2x-y+k=0$ の距離が，
円の半径 $\sqrt{5}$ と一致するときであるから，

$\dfrac{|k|}{\sqrt{2^2+(-1)^2}}=\sqrt{5}$

$|k|=5$

よって，$k=\pm5$

［β−6］三角関数（加法定理を除く）

(1) $(\sin\theta-\cos\theta)^2=\left(\dfrac{1}{3}\right)^2$

$\sin^2\theta-2\sin\theta\cos\theta+\cos^2\theta=\dfrac{1}{9}$

$1-2\sin\theta\cos\theta=\dfrac{1}{9}$

$-2\sin\theta\cos\theta=-\dfrac{8}{9}$

$\sin\theta\cos\theta=\dfrac{4}{9}$

(2) $y=\sin k\theta$ の周期は $\dfrac{2\pi}{k}$ なので

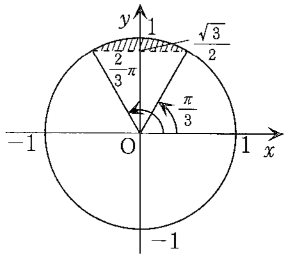
$y=\sin\dfrac{x}{3}$ の周期は $\dfrac{2\pi}{\frac{1}{3}}=6\pi$

(3) $0\leqq\theta<2\pi$ のとき

$\sin\theta=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$ を満たす角 θ は，

$\theta=\dfrac{\pi}{3},\ \dfrac{2}{3}\pi$

よって，下図より不等式の解は $\dfrac{\pi}{3}<\theta<\dfrac{2}{3}\pi$



(4) (ア) 40° は第1象限の角なので tan 40° は正

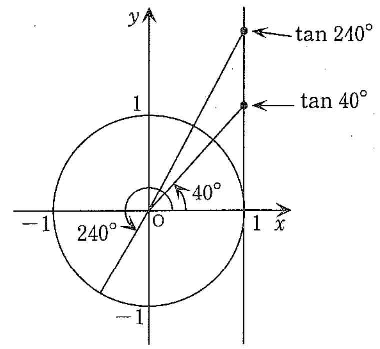
(イ) 140° は第2象限の角なので tan 140° は負

(ウ) 240° は第3象限の角なので tan 240° は正

(エ) 340° は第4象限の角なので tan 340° は負

となるので下図より

tan 40° < tan 240°　よって，最も大きい値は(ウ)

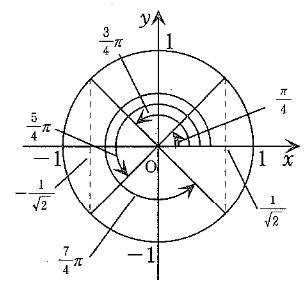


(5) $\cos^2\theta=\dfrac{1}{2}$，$\cos\theta=\pm\dfrac{1}{\sqrt{2}}$

$0\leqq\theta<2\pi$

のとき，下図より

$\theta=\dfrac{\pi}{4},\ \dfrac{3}{4}\pi,\ \dfrac{5}{4}\pi,\ \dfrac{7}{4}\pi$



［β−7］指数関数・対数関数（対数関数を除く）

(1) $a^{\frac{1}{2}}\times a^{\frac{1}{3}}\div a^{-\frac{7}{6}}$

$=a^{\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\left(-\frac{7}{6}\right)}=a^2$

(2) $(a-b)(a^2+ab+b^2)=a^3-b^3$ なので

$\left(5^{\frac{1}{3}}-1\right)\left(5^{\frac{2}{3}}+5^{\frac{1}{3}}+1\right)=\left(5^{\frac{1}{3}}\right)^3-1^3=5-1=4$

(3) $\sqrt[3]{8^{-2}}=\sqrt[3]{(2)^{-6}}=2^{-\frac{6}{3}}=2^{-2}$

$\dfrac{1}{2}=2^{-1}$，$\left(\sqrt{64}\right)^{-1}=8^{-1}=2^{-3}$

指数を比較すると $-3<-2<-1<0$

底2は1より大きいので，$2^{-3}<2^{-2}<2^{-1}<2^0$

よって，$\left(\sqrt{64}\right)^{-1},\ \sqrt[3]{8^{-2}},\ \dfrac{1}{2},\ 2^0$

(4) $\dfrac{(2^x)^2-(2^{-x})^2}{2^x+2^{-x}}=\dfrac{(2^x+2^{-x})(2^x-2^{-x})}{2^x+2^{-x}}$

$=2^x-2^{-x}=2^x-\dfrac{1}{2^x}=3-\dfrac{1}{3}=\dfrac{8}{3}$

(5) $9^x-12\times3^x+27=0$

$(3^x)^2-12\times3^x+27=0$

$(3^x-3)(3^x-9)=0$

$3^x=3$ または $3^x=9$ なので

$x=1,\ 2$

［β−8］数列

(1) 初項 a，公差 4 の等差数列の一般項 a_n は

$a_n=a+(n-1)\times4$

第6項が17であるから

$a_6=a+(6-1)\times4=17$

ゆえに $a=-3$

(2) 初項 a，公比 r の等比数列の一般項 a_n は

$a_n=ar^{n-1}$，

$a_2=-4$ より $ar=-4$ …①

$a_5=32$ より $ar^4=32$ …②

①，②より

$\dfrac{ar^4}{ar}=\dfrac{32}{-4}$，

$r^3=-8$

r は実数であるから

$r=-2$

$ar=-4$ に代入して

$a(-2)=-4$

$a=2$

よって，$a=2$，$r=-2$

(3) 初項 101，公差 −3 の等差数列の一般項 a_n は

$a_n=101+(n-1)\times(-3)=-3n+104$

一般項 a_n が0以上となるのは，

$-3n+104\geqq0$

$n\leqq\dfrac{104}{3}=34.6\cdots$

n は自然数であるから

したがって，等差数列 $\{a_n\}$ は第34項までの和が最大となる。

(4) $\displaystyle\sum_{k=1}^{10}(k^2-4k)=\sum_{k=1}^{10}k^2-4\sum_{k=1}^{10}k$

$=\frac{1}{6}\times10\times(10+1)\times(2\times10+1)-4\times\frac{1}{2}\times10\times(10+1)$

$=\underline{\underline{165}}$

(5) $a_1=S_1$ なので $a_1=1^2+2\times1=3$ … ①

$n\geqq2$ のとき

$a_n=S_n-S_{n-1}=n^2+2n-\{(n-1)^2+2(n-1)\}$

$=2n+1$ … ②

② に $n=1$ を代入すると

$a_1=2\times1+1=3$ となり ① と一致。

ゆえに，$\underline{\underline{a_n=2n+1}}$

[β－9] ベクトル

(1) $\vec{a}=(x+1,\ -6)$，$\vec{b}=(-1,\ x)$

2つのベクトルは平行になるとき

$\vec{a}=k\vec{b}$ (k は実数) と表される。

$(x+1,\ -6)=k(-1,\ x)$

$(x+1,\ -6)=(-k,\ kx)$ なので

$\begin{cases}x+1=-k \cdots ①\\ -6=kx \cdots ②\end{cases}$

① より $k=-x-1$，② に代入して

$x^2+x-6=0$

$(x+3)(x-2)=0$

ゆえに，$\underline{\underline{x=-3,\ 2}}$

(2) $|\vec{a}-\vec{b}|=\sqrt{13}$ より

$|\vec{a}-\vec{b}|^2=13$

$|\vec{a}|^2-2\vec{a}\cdot\vec{b}+|\vec{b}|^2=13$

$1^2-2\vec{a}\cdot\vec{b}+3^2=13$

$-2\vec{a}\cdot\vec{b}=3$

ゆえに，$\underline{\underline{\vec{a}\cdot\vec{b}=-\frac{3}{2}}}$

(3) $\vec{a}=(2,\ 1)$，$\vec{b}=(-3,\ 1)$ のなす角 θ は

$\cos\theta=\dfrac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{|\vec{a}||\vec{b}|}=\dfrac{2\times(-3)+1\times1}{\sqrt{2^2+1^2}\sqrt{(-3)^2+1^2}}$

$=\dfrac{-5}{\sqrt{5}\sqrt{10}}=-\dfrac{1}{\sqrt{2}}$

$0^\circ\leqq\theta\leqq180^\circ$ であるから，これを満たす角 θ は

$\underline{\underline{\theta=135^\circ}}$

(4) CP : PB $=s:(1-s)$

AP : PD $=t:(1-t)$ とすると

下図より

$\overrightarrow{\mathrm{OP}}=\frac{3}{5}(1-s)\vec{a}+s\vec{b}$

$\overrightarrow{\mathrm{OP}}=(1-t)\vec{a}+\frac{1}{2}t\vec{b}$

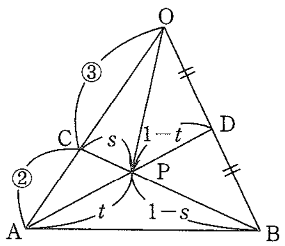
ここで，$\vec{a}\neq\vec{0}$，$\vec{b}\neq\vec{0}$ でかつ $\vec{a}$，$\vec{b}$ は

平行でないから

$\begin{cases}\frac{3}{5}(1-s)=1-t\\ s=\frac{1}{2}t\end{cases}$

これを解くと $s=\frac{2}{7}$，$t=\frac{4}{7}$

よって，$\underline{\underline{\overrightarrow{\mathrm{OP}}=\frac{3}{7}\vec{a}+\frac{2}{7}\vec{b}}}$



(5) $\overrightarrow{\mathrm{OA}}=\vec{a}$，$\overrightarrow{\mathrm{OB}}=\vec{b}$，$\overrightarrow{\mathrm{OC}}=\vec{c}$

$\overrightarrow{\mathrm{OP}}=\dfrac{3a+2b}{2+3}=\dfrac{3\vec{a}+2\vec{b}}{5}$

また，点 Q は △OBC の重心なので，

$\overrightarrow{\mathrm{OQ}}=\dfrac{\vec{b}+\vec{c}}{3}$

$\overrightarrow{\mathrm{PQ}}=\overrightarrow{\mathrm{OQ}}-\overrightarrow{\mathrm{OP}}=\dfrac{\vec{b}+\vec{c}}{3}-\dfrac{3\vec{a}+2\vec{b}}{5}$

$=\dfrac{5\vec{b}+5\vec{c}-9a-6\vec{b}}{15}=\dfrac{-9\vec{a}-\vec{b}+5\vec{c}}{15}$

$=\underline{\underline{-\frac{3}{5}\vec{a}-\frac{1}{15}\vec{b}+\frac{1}{3}\vec{c}}}$