平成19年度　秋季県下一斉学力テスト $\boxed{\text{S I }\alpha}$ 解答 No. 1

$\boxed{\alpha\text{共通問題}}$ 方程式と不等式

(1) $3(2x+1)-5(x-1)$
$= 6x+3-5x+5$
$= \underline{\underline{x+8}}$

(2) $(2x+3y)(3x-2y)$
$= \underline{\underline{6x^2+5xy-6y^2}}$

(3) $3x^2+2xy-y^2$
$= \underline{\underline{(3x-y)(x+y)}}$

$$\begin{array}{ccccc} 3 & \diagdown\!\!\!\diagup & -y & \to & -y \\ 1 & & y & \to & 3y \\ \hline & & & & 2y \end{array}$$

(4) $\sqrt{50}-\sqrt{32}+2\sqrt{18}$
$= 5\sqrt{2}-4\sqrt{2}+2\times3\sqrt{2}$
$= \underline{\underline{7\sqrt{2}}}$

(5) $2x^2+3x-4=0$

$$x = \frac{-3\pm\sqrt{3^2-4\times2\times(-4)}}{2\times2}$$

$$= \underline{\underline{\frac{-3\pm\sqrt{41}}{4}}}$$

(6) $$\frac{3}{\sqrt{6}+\sqrt{3}} = \frac{3(\sqrt{6}-\sqrt{3})}{(\sqrt{6}+\sqrt{3})(\sqrt{6}-\sqrt{3})}$$

$$= \frac{3(\sqrt{6}-\sqrt{3})}{6-3}$$

$$= \frac{3(\sqrt{6}-\sqrt{3})}{3}$$

$$= \underline{\underline{\sqrt{6}-\sqrt{3}}}$$

(7) $x=2$ が $3x^2+kx+4=0$ の解であるから，
$3\times2^2+k\times2+4=0$
よって，$\underline{\underline{k=-8}}$

(8) $3x+4>5x-3$
$3x-5x>-3-4$
$-2x>-7$
$x<\frac{7}{2}$
x が自然数であるから，
$\underline{\underline{x=1,\ 2,\ 3}}$

(9) ある数を x とすると
$\underline{x^2=2x+3}$ 5
$x^2-2x-3=0$
$\underline{(x+1)(x-3)=0}$ 7
$x=-1,\ 3$
よって，ある数は $\underline{\underline{-1,\ 3}}$ 10

$\boxed{\alpha\text{選択問題}}$

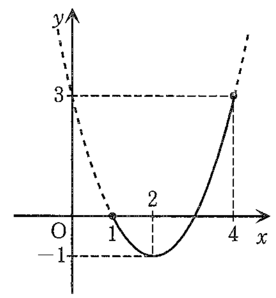
[α − 1] 2 次 関 数

(1) 2次関数 $y=ax^2$ のグラフを x 軸方向に p，y 軸方向に q だけ平行移動したものは，2次関数 $y=a(x-p)^2+q$ であるから，$p=3$，$q=5$
よって，$\underline{\underline{①\ 3\quad②\ 5}}$

(2) 2次関数 $y=\frac{1}{2}(x-1)^2-5$ のグラフの頂点の座標は，$\underline{\underline{(1,\ -5)}}$

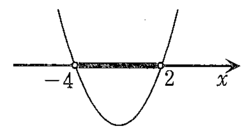
(3) $D=3^2-4\times1\times2$
$=1>0$
したがって，x軸との共有点の個数は $\underline{\underline{2}}$ 個

(4) $y=x^2-4x+3$ を変形すると
$y=(x-2)^2-1$ となるので，
2次関数 $y=x^2-4x+3$ の $1\leqq x\leqq4$ におけるグラフは図のようになる。



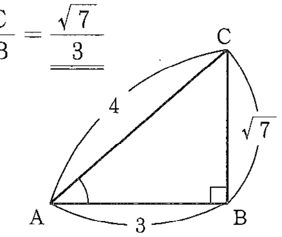
よって，$x=2$ のとき
最小値 $\underline{\underline{-1}}$

(5) $(x+4)(x-2)<0$ より
$\underline{\underline{-4<x<2}}$



[α − 2] 図形と計量

(1) 図より $\tan A = \frac{BC}{AB} = \underline{\underline{\frac{\sqrt{7}}{3}}}$

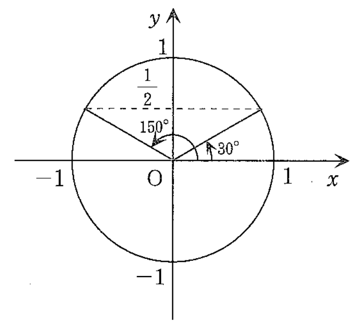


(2) $\sin120^\circ\times\cos30^\circ$

$$= \frac{\sqrt{3}}{2}\times\frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$= \underline{\underline{\frac{3}{4}}}$$

(3)



上図より，$\underline{\underline{\theta=30^\circ,\ 150^\circ}}$

(4) △ABC の面積を S とすると

$$S=\frac{1}{2}\times AB\times BC\times\sin B$$

よって

$$S=\frac{1}{2}\times4\times3\sqrt{2}\times\sin135^\circ$$

$$=\frac{1}{2}\times4\times3\sqrt{2}\times\frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$=\underline{\underline{6}}$$

(5) 余弦定理より

$$BC^2 = AB^2+CA^2-2\times AB\times CA\times\cos\angle A$$

$$=3^2+5^2-2\times3\times5\times\cos120^\circ$$

$$=9+25-2\times3\times5\times\left(-\frac{1}{2}\right)$$

$$=9+25+15$$

$$=49$$

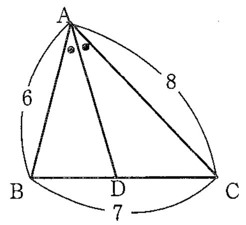
$BC>0$ より
$BC=\underline{\underline{7}}$

平成19年度　秋季県下一斉学力テスト $\boxed{\text{S I }\alpha}$ 解答 No. 2

［α－3］平面図形

(1) 三角形の3辺の垂直二等分線の交点は，外接円の中心である。よって，外心

(2) 角の二等分線と線分の比の性質より
$BD : DC = AB : AC = 6 : 8 = 3 : 4$
よって
$BD = 7 \times \dfrac{3}{3+4} = 7 \times \dfrac{3}{7} = 3$



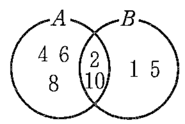
(3) 円に内接する四角形の対角の和は 180° であるから
$\alpha = \angle BAD = 180^\circ - \angle BCD = 180^\circ - 84^\circ = 96^\circ$

(4) 同じ弧 BC に対する円周角は等しいので
$\angle BAC = \angle BDC = 25^\circ$
$\triangle ABP$ において，$\angle APB$ の外角が
$\angle APD$ となるから
$\alpha = \angle APD = \angle ABP + \angle BAP = 70^\circ + 25^\circ = 95^\circ$

(5) 円の接線と弦のつくる角の性質より
$\angle CAP = \angle CDA = 120^\circ$
$\triangle CAP$ の内角の和は 180° であるから，
$\alpha = \angle CPA$
$= 180^\circ - (\angle CAP + \angle ACP)$
$= 180^\circ - (120^\circ + 40^\circ)$
$= 20^\circ$

［α－4］集合と論理

(1)



$A \cup B = \{1, 2, 4, 5, 6, 8, 10\}$

(2) 1から200までの整数で，6の倍数の集合を A，8の倍数の集合を B とする。
$A = \{6\times1, 6\times2, \cdots, 6\times33\}$ より
A の要素の個数 $n(A) = 33$
$B = \{8\times1, 8\times2, \cdots, 8\times25\}$ より
B の要素の個数 $n(B) = 25$
また，$A \cap B$ は24の倍数の集合なので，
$A \cap B = \{24\times1, 24\times2, \cdots, 24\times8\}$ より
$A \cap B$ の要素の個数 $n(A \cap B) = 8$
求める個数は，$A \cup B$ の要素の個数なので，
$n(A \cup B) = n(A) + n(B) - n(A \cap B)$
$= 33 + 25 - 8$
$= 50$（個）

(3) （反例）$x = -3$ のとき
$x^2 = 9$ では成り立つが，$x = 3$ ではない。

(4) 9の正の約数は $\{1, 3, 9\}$ である。
9以下の正の奇数は $\{1, 3, 5, 7, 9\}$ である。
命題「9の正の約数ならば9以下の正の約数である。」は真である。
命題「9以下の正の約数ならば9の正の約数である。」は偽である。
したがって，
(イ) 十分条件であるが必要条件ではない。

(5) 命題「$x+y=3$ ならば，$x=2$ かつ $y=1$ である。」の対偶は，
「$x \neq 2$ または $y \neq 1$ ならば，$x+y \neq 3$ である。」

［α－5］場合の数と確率

(1) 大きいさいころの目が5以上となるのは2通り，小さいさいころの目が3以下となるのは3通り。
積の法則を使って，
$2 \times 3 = 6$（通り）

(2) 10人の中から3人を選んで並べる順列であるから
${}_{10}P_3 = 10 \times 9 \times 8 = 720$（通り）

(3) ${}_8C_5 = {}_8C_{8-5} = {}_8C_3 = \dfrac{8 \cdot 7 \cdot 6}{3 \cdot 2 \cdot 1} = 56$

(4) 1個のさいころを2回投げるとき，目の出方は
$6 \times 6 = 36$（通り）
そのうち，2回とも1の目が出る場合は
$1 \times 1 = 1$（通り）
求める確率は $\dfrac{1}{36}$

(5) 8本のくじから同時に2本のくじを引く場合は ${}_8C_2$ 通りで，そのうち当たりくじとはずれくじが1本ずつである場合は ${}_3C_1 \times {}_5C_1$ 通りあるから
求める確率は
$\dfrac{{}_3C_1 \times {}_5C_1}{{}_8C_2} = \dfrac{15}{28}$

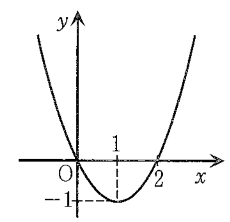
［α－6］2次関数（2次不等式は除く）

(1) 2次関数 $y = x^2 - 4x + c$ のグラフが点 $(2, -3)$ を通るから，
$-3 = 2^2 - 4 \cdot 2 + c$
$c = 1$

(2) $y = x^2 + 2x + 6$ を変形すると，
$y = (x+1)^2 + 5$ となるから，
頂点の座標は $(-1, 5)$

(3) $y = (x+9)(x-1)$ を展開すると，
$y = x^2 + 8x - 9$ となるので，
y 軸との交点の y 座標は，$y = -9$

(4) 頂点の座標は $(1, -1)$ で，原点を通るから，
グラフは下図のようになる。



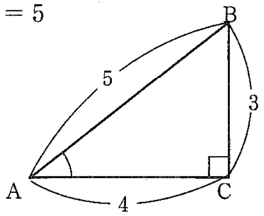
(5) グラフが下に凸の放物線なので $a > 0$
y 軸との交点は $(0, c)$ で，グラフは
y 軸と原点よりも下側で交わっているから $c < 0$
したがって，(イ)

平成19年度　秋季県下一斉学力テスト $\boxed{\mathrm{S\,I}\,\alpha}$ 解答 No.3

[α − 7] 図 形 と 計 量
（正弦定理，余弦定理，図形の計量は除く）

(1)　$\sin^2 150^\circ = \left(\dfrac{1}{2}\right)^2 = \dfrac{1}{4}$

(2)　三平方の定理より AB ＝ 5
右図から
$\cos A = \dfrac{AC}{AB} = \dfrac{4}{5}$



(3)　$\sin^2\theta + \cos^2\theta = 1$ より

$\sin^2\theta + \left(\dfrac{1}{3}\right)^2 = 1$

$\sin^2\theta = 1 - \left(\dfrac{1}{3}\right)^2 = 1 - \dfrac{1}{9} = \dfrac{8}{9}$

$0^\circ \leqq \theta \leqq 90^\circ$ だから $\sin\theta \geqq 0$

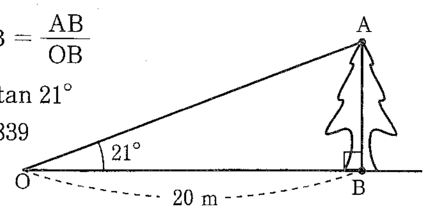
よって，$\sin\theta = \dfrac{2\sqrt{2}}{3}$

(4)　右図において，

$\tan \angle AOB = \dfrac{AB}{OB}$

$AB = OB \tan 21^\circ$
$= 20 \times 0.3839$
$= 7.678$
$\fallingdotseq 7.7$

よって木の高さは 7.7（m）



(5)　$\cos\alpha = \sin(90^\circ - \alpha)$ より
$\cos 15^\circ = \sin(90^\circ - 15^\circ)$
$= \sin 75^\circ$
したがって $\cos 15^\circ$ と等しいものは (エ)

[α − 8] 場合の数と確率（確率は除く）

(1)　${}_5P_3 = 5 \times 4 \times 3 = 60$

(2)　$72 = 2^3 \times 3^2$ であるから，
72 の正の約数は，2^3 の正の約数と，
3^2 の正の約数の積で表される。
2^3 の正の約数は，1，2，2^2，2^3 の 4 個
3^2 の正の約数は，1，3，3^2 の 3 個である。
したがって，72 の正の約数の個数は，
積の法則により $4 \times 3 = 12$（個）

(3)　6 文字の中から 3 文字を選ぶ組合せだから

${}_6C_3 = \dfrac{6 \times 5 \times 4}{3 \times 2 \times 1} = 20$（通り）

(4)　5 人の円順列だから

$\dfrac{5!}{5} = 4! = 4 \times 3 \times 2 \times 1 = 24$（通り）

(5)　図の上で，右に進むことを →，上に進むことを ↑ で表すと，A から B に最短距離で行く方法は，5 個の → と，3 個の ↑ を 1 列に並べる順列の総数に等しい。
したがって，その総数は

$\dfrac{8!}{5!3!} = 56$（通り）

[α − 9] 方程式と不等式 ①

(1)　$2a^2b^3 \times (-ab^2)^2$
$= 2a^2b^3 \times a^2b^4$
$= 2a^4b^7$

(2)　$(2x-y)^2(2x+y)^2$
$= \{(2x-y)(2x+y)\}^2$
$= (4x^2-y^2)^2$
$= 16x^4 - 8x^2y^2 + y^4$

(3)　$2x^2y + 4xy - 30y$
$= 2y(x^2 + 2x - 15)$
$= 2y(x+5)(x-3)$

(4)　$2 - x < \dfrac{2x+1}{3}$
両辺に 3 をかけて
$3(2-x) < 2x+1$
$6 - 3x < 2x + 1$
$-5x < -5$
$x > 1$

(5)　$D = (-6)^2 - 4 \cdot (-3m)$
$= 36 + 12m$
重解を持つとき $D = 0$ なので
$36 + 12m = 0$
$12m = -36$
$m = -3$

[α − 10] 方程式と不等式 ②

(1)　$A - 2B$
$= (6x^2 - 4x + 3) - 2(x^2 - 2x - 1)$
$= 6x^2 - 4x + 3 - 2x^2 + 4x + 2$
$= 4x^2 + 5$

(2)　$\sqrt{27} - \dfrac{12}{\sqrt{3}} + \sqrt{12}$

$= 3\sqrt{3} - \dfrac{12\sqrt{3}}{3} + 2\sqrt{3}$

$= 3\sqrt{3} - 4\sqrt{3} + 2\sqrt{3}$
$= \sqrt{3}$

(3)　$a(x-2) - b(2-x)$
$= a(x-2) + b(x-2)$
$= (a+b)(x-2)$

(4)　$0.2x - 1 < 0.3x + 3$
両辺を 10 倍して
$2x - 10 < 3x + 30$
$2x - 3x < 30 + 10$
$-x < 40$
$x > -40$

(5)　$2x^2 - 6x - 3 = 0$

$x = \dfrac{6 \pm \sqrt{(-6)^2 - 4 \cdot 2 \cdot (-3)}}{2 \cdot 2}$

$= \dfrac{6 \pm \sqrt{60}}{4}$

$= \dfrac{6 \pm 2\sqrt{15}}{4}$

$= \dfrac{3 \pm \sqrt{15}}{2}$

平成19年度　秋季県下一斉学力テスト ＳⅠβ 解答 No.1

β共通問題　方程式と不等式

(1) $(x-y+2)(x-y+4)$

$=\{(x-y)+2\}\{(x-y)+4\}$

$=(x-y)^2+6(x-y)+8$

$=\underline{\underline{x^2-2xy+y^2+6x-6y+8}}$

(2) $3x^2+2xy-y^2$

$=\underline{\underline{(x+y)(3x-y)}}$

$$\begin{array}{ccc} 1 & \diagdown\!\!\!\diagup & y \to 3y \\ 3 & & -y \to -y \end{array}$$

(3) ① $5 \leqq 2-3x$ より

$3x \leqq -3$,　$x \leqq -1$

② $2-3x \leqq 8$ より

$-3x \leqq 6$,　$x \geqq -2$

よって　①, ②より　$\underline{\underline{-2 \leqq x \leqq -1}}$

【別解】

$5 \leqq 2-3x \leqq 8$ より

$5-2 \leqq 2-3x-2 \leqq 8-2$

$3 \leqq -3x \leqq 6$

ゆえに　$\underline{\underline{-2 \leqq x \leqq -1}}$

(4) $2a^2\times(3ab^3)^2\times\left(\frac{1}{6}a^2b^2\right)^2$

$=2a^2\times9a^2b^6\times\frac{1}{36}a^4b^4$

$=\underline{\underline{\frac{1}{2}a^8b^{10}}}$

(5) $3x^2-4x-5=0$ より「解の公式」を用いて

$x=\frac{2\pm\sqrt{2^2-3\cdot(-5)}}{3}=\underline{\underline{\frac{2\pm\sqrt{19}}{3}}}$

(6) $0<x<3$ のとき,

$|x-3|=3-x$,　$|x|=x$　より

$|x-3|+2|x|=3x+2$ の絶対値を

はずすと　$3-x+2x=3x+2$

$-2x=-1$,　$x=\frac{1}{2}$

これは $0<x<3$ を満たすので　$x=\underline{\underline{\frac{1}{2}}}$

(7) (ア)　x, y の分母を有理化すると

$x=\frac{2}{\sqrt{5}-\sqrt{3}}=\frac{2(\sqrt{5}+\sqrt{3})}{(\sqrt{5}-\sqrt{3})(\sqrt{5}+\sqrt{3})}$

$=\sqrt{5}+\sqrt{3}$

$y=\frac{2}{\sqrt{5}+\sqrt{3}}=\frac{2(\sqrt{5}-\sqrt{3})}{(\sqrt{5}+\sqrt{3})(\sqrt{5}-\sqrt{3})}$

$=\sqrt{5}-\sqrt{3}$　2

$x+y=(\sqrt{5}+\sqrt{3})+(\sqrt{5}-\sqrt{3})=\underline{\underline{2\sqrt{5}}}$　4

$xy=(\sqrt{5}+\sqrt{3})(\sqrt{5}-\sqrt{3})=5-3=\underline{\underline{2}}$　⑥

(イ)　$x^3+y^3=(x+y)^3-3xy(x+y)$　2

$=(2\sqrt{5})^3-3\times2\times2\sqrt{5}$

$=40\sqrt{5}-12\sqrt{5}=\underline{\underline{28\sqrt{5}}}$　④

(8) (ア)　$\frac{2}{\sqrt{5}-1}$ の分母を有理化すると

$\frac{2}{\sqrt{5}-1}=\frac{2(\sqrt{5}+1)}{(\sqrt{5}-1)(\sqrt{5}+1)}$

$=\frac{2(\sqrt{5}+1)}{5-1}=\frac{\sqrt{5}+1}{2}$　1

ここで　$\sqrt{4}<\sqrt{5}<\sqrt{9}$　より

$2<\sqrt{5}<3$

ゆえに　$\frac{3}{2}<\frac{\sqrt{5}+1}{2}<2$

よって　$a=\underline{\underline{1}}$,　3　$b=\frac{\sqrt{5}+1}{2}-1=\underline{\underline{\frac{\sqrt{5}-1}{2}}}$　⑤

(イ)　$ab+b^2=b(a+b)$　2

$=\frac{\sqrt{5}-1}{2}\left(1+\frac{\sqrt{5}-1}{2}\right)$

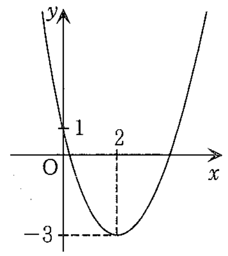
$=\frac{\sqrt{5}-1}{2}\times\frac{\sqrt{5}+1}{2}=\frac{5-1}{4}=\underline{\underline{1}}$　⑤

$\left(a+b=\frac{2}{\sqrt{5}-1}=\frac{\sqrt{5}+1}{2}\right)$

β選択問題

[β−1] 2次関数

(1) $y=x^2-4x+1=(x-2)^2-3$ よりグラフの頂点の座標は $(2,\ -3)$ である。
y 軸と点 $(0,\ 1)$ で交わる。
したがって求めるグラフは右図のようになる。



(2) $y=x^2+2x+m+2$ のグラフが x 軸と共有点をもつための条件は $\frac{D}{4}\geqq0$ である。

$1^2-(m+2)\geqq0$

$-m\geqq1$

よって　$\underline{\underline{m\leqq-1}}$

(3) $x^2-2x+2>0$

$x^2-2x+2=0$ とおくと

$\frac{D}{4}=1-2=-1<0$

したがって $x^2-2x+2=0$ は実数解をもたない。
よって, $x^2-2x+2=(x-1)^2+1>0$ より
求める不等式の解は　$\underline{\underline{\text{すべての実数}}}$

(4) $y=(x+1)^2+2$ のグラフの頂点 $(-1,\ 2)$ を x 軸方向に 3, y 軸方向に a だけ平行移動すると, $y=(x-b)^2+1$ のグラフの頂点 $(b,\ 1)$ に重なるから

$-1+3=b$,　$2+a=1$

よって　$\underline{\underline{a=-1,\ b=2}}$

(5) 2次関数 $y=x^2-(a+2)x+2a$ のグラフと x 軸との共有点の x 座標は $y=0$ として

$x^2-(a+2)x+2a=0$

$(x-a)(x-2)=0$

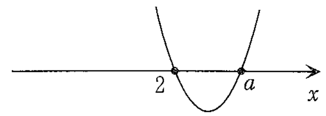
$x=a,\ 2$ (2点A, Bで交わるので $a\neq2$)

$AB=5$ より $|a-2|=5$

① $2<a$ のとき

$a-2=5$ より

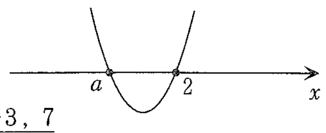
$a=7$



② $a<2$ のとき

$2-a=5$ より

$a=-3$



①, ②より　$a=\underline{\underline{-3,\ 7}}$

[β−2] 図形と計量

(1) △ABC の外接円の半径を R とすると

正弦定理より $\frac{4}{\sin135^\circ}=2R$

$R=\frac{2}{\sin135^\circ}=2\div\frac{1}{\sqrt{2}}=\underline{\underline{2\sqrt{2}}}$

(2) 半径が4の球の体積を V とすると, 求める立体の体積は　$\frac{1}{4}V$ より

$\frac{1}{4}V=\frac{1}{4}\times\frac{4}{3}\times\pi\times4^3=\underline{\underline{\frac{64}{3}}}\pi$

(3) 線分 BD の長さについては, 余弦定理より

$BD^2=3^2+5^2-2\times3\times5\times\cos120^\circ$

$=9+25+15=49$

$BD>0$ より　$BD=7$

次に, △BCD は直角三角形であるので
三平方の定理より

$BC^2+5^2=7^2$　$BC^2=24$

$BC>0$ より　$BC=\sqrt{24}=\underline{\underline{2\sqrt{6}}}$

(4) 点 A から辺 BC に垂線を下ろし, その交点を D とすると, △ABD は直角三角形であるから三平方の定理より $AD=\sqrt{AB^2-AD^2}=\sqrt{5^2-3^2}=4$

ゆえに　$\triangle ABC=\frac{1}{2}\times6\times4=12$

次に, 内接円の半径を r とし, 内接円の中心を O とすると面積について

$\triangle ABC=\triangle OAB+\triangle OBC+\triangle OCA$

よって　$12=\frac{1}{2}\times5\times r+\frac{1}{2}\times6\times r+\frac{1}{2}\times5\times r$

ゆえに　$r=\frac{3}{2}$

すなわち, 求める内接円の半径は　$\underline{\underline{\frac{3}{2}}}$

(5) 面積について

$\triangle ABC=\triangle ABD+\triangle ACD$

よって, 線分 AD の長さを x とすると

$\frac{1}{2}\times3\times2\times\sin60^\circ$

$=\frac{1}{2}\times3\times x\times\sin30^\circ+\frac{1}{2}\times2\times x\times\sin30^\circ$

ゆえに　$x=\frac{6\sqrt{3}}{5}$

すなわち, 線分 AD の長さは　$\underline{\underline{\frac{6\sqrt{3}}{5}}}$

平成19年度　秋季県下一斉学力テスト $\boxed{\text{S I }\beta}$ 解答 No. 2

［β－3］平面図形

(1) 円周角と中心角の関係より

$\frac{1}{2}\angle BOD = \angle BAC + \angle CED$

$70^\circ = 30^\circ + \angle CED$

よって　$\angle CED = \underline{40^\circ}$

(2) $\triangle ABD \backsim \triangle CBA$ であり

その相似比は　$AB : BC = 1 : 2$

よって　$\triangle ABD$ と $\triangle ABC$ の面積比は

$1^2 : 2^2 = \underline{1 : 4}$

(3) 接線と弦の作る角により

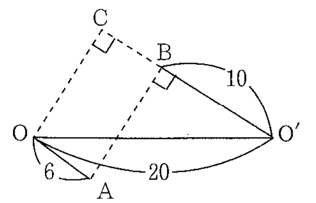
$\angle BAC = \angle CBT = 42^\circ$

ここで，$\angle BAC + \angle ABD = \angle AED$ より

$42^\circ + \angle ABD = 86^\circ$

よって　$\angle ABD = \underline{44^\circ}$

(4) 線分 AB を点 A が点 O に重なるように平行移動し，点 B の移った先を点 C とすると図のようになる。



図より線分 AB の長さは線分 OC の長さと同じだから

$AB = \sqrt{20^2 - 16^2} = \sqrt{144} = \underline{12}$

(5) 方べきの定理より　$CA \times CB = CT^2$

$6 \times 4 = CT^2$　$CT > 0$ より　$CT = 2\sqrt{6}$

次に，接線と弦の作る角より $\angle BTC = \angle TAC$

また　$\angle BCT = \angle TCA$ であるから

$\triangle BTC \backsim \triangle TAC$

ゆえに　$BT : TA = BC : TC = 4 : 2\sqrt{6}$

よって　$\frac{AT}{BT} = \frac{2\sqrt{6}}{4} = \underline{\frac{\sqrt{6}}{2}}$

［β－4］集合と論理

(1) 1 から 100 までの自然数のうち，

3 の倍数は $\{3\times1, 3\times2, \cdots, 3\times33\}$ より 33 個

5 の倍数は $\{5\times1, 5\times2, \cdots, 5\times20\}$ より 20 個

15 の倍数は $\{15\times1, 15\times2, \cdots, 15\times6\}$ より 6 個

3 または 5 で割り切れる数は 3 または 5 の倍数だから

$33 + 20 - 6 = \underline{47}$（個）

(2) ド・モルガンの法則より

$\overline{A} \cap \overline{B} = \overline{A \cup B}$

$A \cup B = \{1, 2, 4, 6, 8, 10\}$

だから　$\overline{A} \cap \overline{B} = \overline{A \cup B} = \underline{\{3, 5, 7, 9\}}$

(3) $x^2 - 3x + 2 = 0$ は

$(x-1)(x-2) = 0$ より　$x = 1, 2$

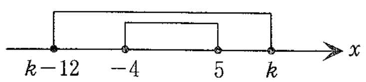
したがって　$x^2 - 3x + 2 = 0$ は $x = 2$ であるための必要条件であるが十分条件ではない。

よって　$\underline{(ア)}$

(4) 対偶は「$\underline{x \leqq 0 \text{ かつ } y \leqq 2 \text{ ならば } x + y \leqq 2}$」

また，対偶の真偽は　明らかに　$\underline{真}$

(5) $\{x \mid -4 \leqq x \leqq 5\}$ が $\{x \mid k - 12 \leqq x \leqq k\}$ の部分集合になればよい。



図より，次の連立不等式を満たす。

$$\begin{cases} k - 12 \leqq -4 \\ k \geqq 5 \end{cases}$$

よって　$\underline{5 \leqq k \leqq 8}$

［β－5］場合の数と確率

(1) $(6-1)! = 5! = \underline{120}$（通り）

(2) K が 2 個，A が 3 個，W，S，I が各 1 個，計 8 個の同じものを含む順列だから

$\frac{8!}{2!3!1!1!1!} = \underline{3360}$（通り）

(3) a，b が隣り合う場合は　$2 \times 4!$ 通り

a と b が隣り合わない事象は，a と b が隣り合う事象の余事象だから，その確率は

$1 - \frac{2 \times 4!}{5!} = 1 - \frac{2}{5} = \underline{\frac{3}{5}}$

(4) 8 枚のカードから同時に 2 枚のカードを取り出す取り出し方は，${}_8C_2 = \frac{8 \times 7}{2 \times 1} = 28$（通り）

大きい方の数字が 2 のとき，(1, 2) の 1 通り，3 のとき，(1, 3)，(2, 3) の 2 通り，以下同様に数えて，表をつくると次のようになる。

数字	2	3	4	5	6	7	8	計
確率	$\frac{1}{28}$	$\frac{2}{28}$	$\frac{3}{28}$	$\frac{4}{28}$	$\frac{5}{28}$	$\frac{6}{28}$	$\frac{7}{28}$	1

よって求める期待値は

$$2 \times \frac{1}{28} + 3 \times \frac{2}{28} + 4 \times \frac{3}{28} + 5 \times \frac{4}{28} + 6 \times \frac{5}{28} + 7 \times \frac{6}{28} + 8 \times \frac{7}{28}$$

$$= \frac{1}{28}(2 + 6 + 12 + 20 + 30 + 42 + 56) = \underline{6}$$

(5) $(2x - y)^7$ の展開式における一般項は

${}_7C_r(2x)^{7-r}(-y)^r = {}_7C_r \times 2^{7-r} \times (-1)^r \times x^{7-r}y^r$

x^4y^3 の項は，$r = 3$ より求める係数は

${}_7C_3 \times 2^4 \times (-1)^3 = \frac{7 \cdot 6 \cdot 5}{3 \cdot 2 \cdot 1} \times 16 \times (-1) = \underline{-560}$

［β－6］2 次関数（2 次不等式は除く）

(1) $y = -2(x+1)^2 + 5$

よって，グラフの頂点の座標は $\underline{(-1, 5)}$

(2) $y = x^2 - 2x + 4 = (x-1)^2 + 3$ より

頂点の座標は (1, 3)

この放物線を y 軸に関して対称移動すると

頂点は (−1, 3) で，x^2 の係数は 1 である。

よって，求める 2 次関数は

$y = (x+1)^2 + 3 = \underline{x^2 + 2x + 4}$

【別解】

y 軸に関しての対称移動は x に $-x$ を代入して

$y = (-x)^2 - 2(-x) + 4 = \underline{x^2 + 2x + 4}$

(3) 頂点の座標が (−1, 3) より

$y = a(x+1)^2 + 3$

とおける。点 (2, −6) を通るから

$-6 = a(2+1)^2 + 3$

$9a = -9$

$a = -1$

よって　$y = -(x+1)^2 + 3 = \underline{-x^2 - 2x + 2}$

(4) 点 (1, 1) を x 軸方向に −2，y 軸方向に −3 だけ平行移動した点 (−1, −2) は，

2 次関数 $y = 2x^2 + ax - 5$ のグラフ上にある。

よって

$-2 = 2 \times (-1)^2 + a \times (-1) - 5$

$2 - a - 5 = -2$

$a = \underline{-1}$

【別解】

$y = 2x^2 + ax - 5$ のグラフを x 軸方向に 2，y 軸方向に 3 だけ平行移動させたグラフは

$y - 3 = 2(x-2)^2 + a(x-2) - 5$ で表される。

点 (1, 1) を通るので，

$1 - 3 = 2(1-2)^2 + a(1-2) - 5$

$a = -1$

(5) $y = 2 - x$ を xy に代入して

$xy = x(2 - x)$

$= -x^2 + 2x$

$= -(x-1)^2 + 1$

これは $x = 1$ で最大値 1 をとる。

よって　$x = 1, y = 1$ のとき xy の最大値　$\underline{1}$

平成19年度　秋季県下一斉学力テスト $\boxed{\text{S I } \beta}$ 解答 No. 3

[β−7] 図形と計量
（正弦定理，余弦定理，図形の計量は除く）

(1) $\cos\theta = -\dfrac{1}{3}$ を $1+\tan^2\theta = \dfrac{1}{\cos^2\theta}$ に代入して

$1+\tan^2\theta = 1\div\left(-\dfrac{1}{3}\right)^2 = 1\div\dfrac{1}{9} = 9$

$\tan^2\theta = 8$

$\tan\theta = \pm\sqrt{8} = \pm 2\sqrt{2}$

$0^\circ \leqq \theta \leqq 180^\circ$，$\cos\theta < 0$ より $\tan\theta < 0$

したがって　$\tan\theta = \underline{\underline{-2\sqrt{2}}}$

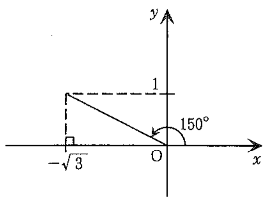
(2) $\sqrt{3}\tan\theta + 1 = 0$ より

$\tan\theta = -\dfrac{1}{\sqrt{3}}$

$0^\circ \leqq \theta \leqq 180^\circ$

右図より

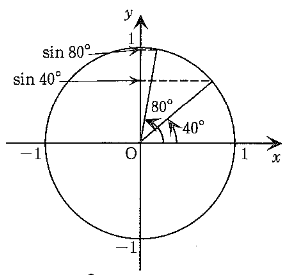
$\theta = \underline{\underline{150^\circ}}$



(3) 100° は，第2象限の角より $\cos 100^\circ < 0$

$\sin 140^\circ = \sin(180^\circ - 40^\circ) = \sin 40^\circ$

右図より



ゆえに　$0 < \sin 40^\circ < \sin 80^\circ$

よって，小さい順に左から並べると

$\underline{\underline{\cos 100^\circ,\ \sin 140^\circ,\ \sin 80^\circ}}$

(4) $\sin(90^\circ - \theta)\cos\theta + \sin(180^\circ - \theta)\sin\theta$

$= \cos\theta \times \cos\theta + \sin\theta \times \sin\theta$

$= \sin^2\theta + \cos^2\theta = \underline{\underline{1}}$

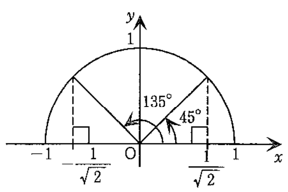
(5) $2\cos^2\theta - 1 = 0$　より，

$\cos^2\theta = \dfrac{1}{2}$

$\cos\theta = \pm\dfrac{1}{\sqrt{2}}$

$0^\circ \leqq \theta \leqq 180^\circ$ より

$\theta = \underline{\underline{45^\circ,\ 135^\circ}}$



[β−8] 場合の数と確率（確率は除く）

(1) ${}_5P_3 = 5\times4\times3 = \underline{\underline{60}}$（個）

(2) 頂点を3つ選ぶ組合せだから

${}_9C_3 = \dfrac{9\times8\times7}{3\times2\times1} = \underline{\underline{84}}$（個）

(3) aとbを両端に並べるのは2通り

よって　$2\times3! = \underline{\underline{12}}$（通り）

(4) 9人の生徒の中からAとBが共に含まれない5人の選び方は ${}_7C_5$ 通り

よって　${}_9C_5 - {}_7C_5 = \dfrac{9\times8\times7\times6}{4\times3\times2\times1} - \dfrac{7\times6}{2\times1}$

$= 126 - 21$

$= \underline{\underline{105}}$（通り）

(5) $x+y+z = 11$ を満たす自然数 x, y, z の組は11個の○があるとして，間の10箇所に2本の仕切りを入れると考えればよいから

○　○　○　○　○　○　○　○　○　○　○
　∧　∧　∧　∧　∧　∧　∧　∧　∧　∧

${}_{10}C_2 = \dfrac{10\times9}{2\times1} = \underline{\underline{45}}$（組）