平成18年度　春季県下一斉学力テスト $\boxed{\text{S II }\alpha}$ 解答 No. 1

［α－1］式と証明・高次方程式

(1) $\dfrac{4x^2}{x-2}\times\dfrac{x^2-4}{12x}=\dfrac{4x^2}{x-2}\times\dfrac{(x+2)(x-2)}{12x}$

$=\underline{\underline{\dfrac{x(x+2)}{3}}}$

(2) $(2+3i)\times(-2i)=-4i-6i^2$

$=-4i-6\times(-1)$

$=\underline{\underline{6-4i}}$

(3) 解と係数の関係より

$\alpha+\beta=-\dfrac{2}{1}=-2$，$\alpha\beta=\dfrac{3}{1}=3$

したがって

$\alpha^2+\beta^2=(\alpha+\beta)^2-2\alpha\beta$

$=(-2)^2-2\times3$

$=\underline{\underline{-2}}$

(4) $P(x)=x^3-7x-6$ とすると

$P(-1)=-1+7-6=0$

$P(1)=1-7-6=-12\neq0$

$P(2)=8-14-6=-12\neq0$

$P(3)=27-21-6=0$

したがって，x^3-7x-6 の因数であるものは

$x+1$ および $x-3$

すなわち　$\underline{\underline{(ア)，(エ)}}$

(5) $P(x)=x^3+2x^2+2x+1$ とすると

$P(-1)=-1+2-2+1=0$

したがって，$P(x)$ は $x+1$ を因数にもつ。

割り算をすると

$$\begin{array}{r} x^2+x+1 \\ x+1\,\overline{)\,x^3+2x^2+2x+1} \\ \underline{x^3+x^2} \\ x^2+2x \\ \underline{x^2+x} \\ x+1 \\ \underline{x+1} \\ 0 \end{array}$$

よって $P(x)=(x+1)(x^2+x+1)$

したがって，与えられた方程式は

$(x+1)(x^2+x+1)=0$ と変形される。

ゆえに $x+1=0$ または $x^2+x+1=0$

よって　$\underline{\underline{x=-1,\ \dfrac{-1\pm\sqrt{3}\,i}{2}}}$

［α－2］図形と方程式

(1) A (0, −2)，B (4, 1) であるから

$AB=\sqrt{(4-0)^2+\{1-(-2)\}^2}=\sqrt{25}=\underline{\underline{5}}$

(2) 2点 (1, −5)，(3, 1) を通る直線の方程式は

$y-(-5)=\dfrac{1-(-5)}{3-1}(x-1)$

$y+5=3(x-1)$

すなわち　$\underline{\underline{y=3x-8}}$　〔$3x-y-8=0$ も可〕

(3) $3x-2y+2=0$ を変形して $y=\dfrac{3}{2}x+1$

したがって，この直線の傾きは $\dfrac{3}{2}$

よって，この直線に平行で，点 (4, 5) を通る直線

の方程式は $y-5=\dfrac{3}{2}(x-4)$

すなわち　$\underline{\underline{3x-2y-2=0}}$　〔$y=\dfrac{3}{2}x-1$ も可〕

【別解】直線 $3x-2y+2=0$ に平行な直線は

$3x-2y+k=0$ と表される。

この直線が点 (4, 5) を通るから

$3\times4-2\times5+k=0$

よって　$k=-2$

ゆえに，求める方程式は $\underline{\underline{3x-2y-2=0}}$

(4) 円の半径は，原点と点 (3, −2) の距離であるから　$\sqrt{3^2+(-2)^2}=\sqrt{13}$

したがって，求める円の方程式は

$\underline{\underline{x^2+y^2=13}}$

(5) $x^2+y^2+4x-2y-k=0$　を変形して

$(x+2)^2+(y-1)^2=k+5$

よって，この方程式が半径 3 の円を表すとき

$k+5=3^2$

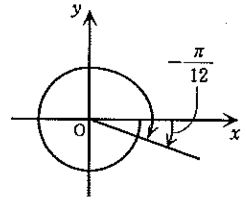
ゆえに　$\underline{\underline{k=4}}$

［α－3］三角関数

(1) $-\dfrac{25}{12}\pi=-2\pi-\dfrac{\pi}{12}$

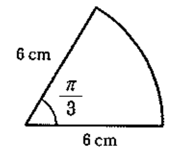
したがって，右図より

$-\dfrac{25}{12}\pi$ は $\underline{\underline{第4象限の角}}$



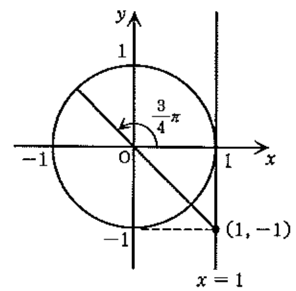
(2) 半径が r，中心角が弧度法で θ の扇形の弧の長さ l は $l=r\theta$ で求められるから，半径 6 cm，中心角 $\dfrac{\pi}{3}$ の扇形の弧の長さは

$6\times\dfrac{\pi}{3}=\underline{\underline{2\pi\ (\text{cm})}}$

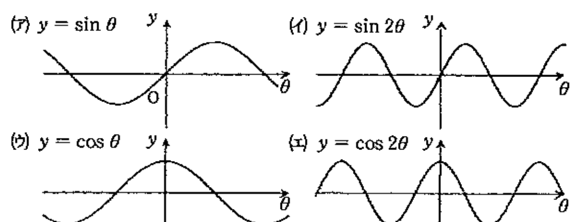


(3) 右図より

$\tan\dfrac{3}{4}\pi=\underline{\underline{-1}}$



(4)



上のグラフのうち，y 軸に関して対称なものは

$y=\cos\theta$ のグラフと $y=\cos2\theta$ のグラフ

したがって　$\underline{\underline{(ウ)，(エ)}}$

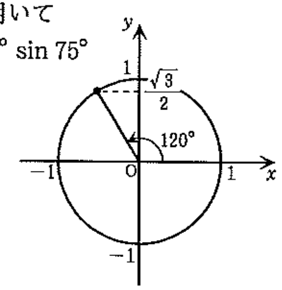
(5) 三角関数の加法定理を用いて

$\sin45^\circ\cos75^\circ+\cos45^\circ\sin75^\circ$

$=\sin(45^\circ+75^\circ)$

$=\sin120^\circ$

$=\underline{\underline{\dfrac{\sqrt{3}}{2}}}$



［α－4］指数関数・対数関数

(1) $7^2\times7^{-4}\div7^{-3}=7^{2+(-4)-(-3)}$

$=7^1$

$=\underline{\underline{7}}$

(2) $\sqrt[5]{9}\times\sqrt[5]{27}=\sqrt[5]{9\times27}$

$=\sqrt[5]{3^5}$

$=\underline{\underline{3}}$

(3) $\log_{10}\dfrac{25}{3}+\log_{10}12=\log_{10}\left(\dfrac{25}{3}\times12\right)$

$=\log_{10}100$

$=\underline{\underline{2}}$

(4) $\left(\dfrac{1}{2}\right)^{x+1}>8$ より　$(2^{-1})^{x+1}>2^3$

$2^{-x-1}>2^3$

底 2 は 1 より大きいから，

$-x-1>3$

$-x>4$

$\underline{\underline{x<-4}}$

(5) $\log_4(x+1)=2$ について，対数の定義により

$x+1=4^2$

ゆえに　$\underline{\underline{x=15}}$

平成18年度　春季県下一斉学力テスト $\boxed{\text{S II }\alpha}$ 解答 No. 2

［α－5］微分・積分の考え

(1) $y = x^3-5x^2+2x-8$ より
$y' = 3x^2-5\cdot 2x+2\cdot 1$
すなわち $\underline{\underline{y' = 3x^2-10x+2}}$

(2) $y = x^2-2x+1$ より $y' = 2x-2$
よって，放物線 $y = x^2-2x+1$ 上の点 (2, 1) における接線の傾きは $2\cdot 2-2 = 2$
したがって，求める接線の方程式は
$y-1 = 2(x-2)$
すなわち $\underline{\underline{y = 2x-3}}$

(3) $f(x) = x^3-3x^2+1$ より
$f'(x) = 3x^2-6x = 3x(x-2)$
$f(0) = 1$，$f(2) = 8-12+1 = -3$
したがって，関数 $f(x)$ の増減は次の表のようになる。

x	$\cdots$	0	$\cdots$	2	$\cdots$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	$\nearrow$	1	$\searrow$	-3	$\nearrow$

よって，$f(x)$ は $x = 0$ のとき，極大値 1
$x = 2$ のとき，極小値 -3
をとる。ゆえに，極大値と極小値の和は
$1+(-3) = \underline{\underline{-2}}$

(4) $\displaystyle\int(2x+1)(3x-2)dx = \int(6x^2-x-2)dx$

$$= 6\cdot\frac{x^3}{3}-\frac{x^2}{2}-2x+C$$

$$= \underline{\underline{2x^3-\frac{1}{2}x^2-2x+C}}$$

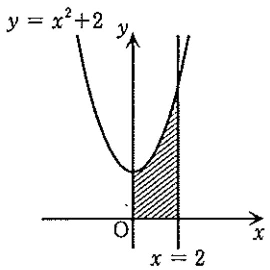
(5) 求める部分の面積を S とすると，図より

$$S = \int_0^2(x^2+2)dx$$

$$= \left[\frac{x^3}{3}+2x\right]_0^2$$

$$= \left(\frac{2^3}{3}+2\cdot 2\right)-0$$

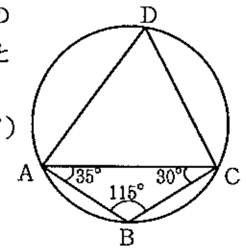
$$= \underline{\underline{\frac{20}{3}}}$$



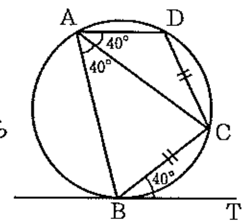
［α－6］平面図形

(1) $|AB-BC| < CA < AB+BC$ が成り立てばよいから $|4-5| < CA < 4+5$
よって $\underline{\underline{1 < CA < 9}}$

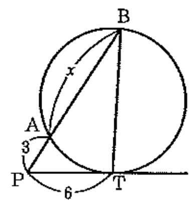
(2) △ABC において，三角形の内角の和が 180° であることから
$\angle ABC = 180^\circ-(35^\circ+30^\circ)$
$= 115^\circ$
四角形 ABCD は円に内接するから
$\angle ABC+\angle ADC = 180^\circ$
$\angle ADC = 180^\circ-\angle ABC$
$= 180^\circ-115^\circ = \underline{\underline{65^\circ}}$



(3) 接線と弦のつくる角の定理により
$\angle BAC = \angle CBT = 40^\circ$
また，BC = CD であるから
$\overset{\frown}{BC} = \overset{\frown}{CD}$ である。すると，大きさが等しい弧に対する円周角は等しいから
$\angle CAD = \angle BAC = 40^\circ$
したがって
$\angle BAD = \angle BAC+\angle CAD = 40^\circ+40^\circ = \underline{\underline{80^\circ}}$



(4) AB $= x$ とする。
方べきの定理により
$PA\cdot PB = PT^2$
$3\cdot(3+x) = 6^2$
$3+x = 12$
よって $x = 9$ より
AB $= \underline{\underline{9}}$



(5) 線分 AG の延長線と辺 BC との交点を D とする。
点 G は重心だから，点 D は BC の中点となる。
よって，BD = DC
△ABD と △ACD において底辺が等しく，高さが等しいから
△ABD = △ACD
よって
$\triangle ABD = \dfrac{1}{2}\triangle ABC$
また，AG : GD = 2 : 1 より
△ABG = 2△BGD
したがって，

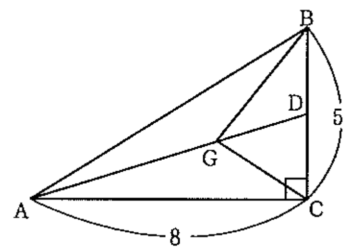
$$\triangle ABG = \frac{2}{3}\triangle ABD = \frac{2}{3}\times\frac{1}{2}\triangle ABC$$

$$= \frac{1}{3}\triangle ABC$$

ここで

$$\triangle ABG = \frac{1}{2}\times 8\times 5 = 20 \text{ より}$$

$$\triangle ABG = \frac{1}{3}\triangle ABC = \underline{\underline{\frac{20}{3}}}$$



［α－7］集合と論理

(1) $U = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$，$A = \{3, 6, 9\}$
であるから $\underline{\underline{\overline{A} = \{1, 2, 4, 5, 7, 8\}}}$

(2) 1 から 70 までの自然数のうち，2 の倍数の集合を A，3 の倍数の集合を B とすると
$A = \{2\cdot 1, 2\cdot 2, 2\cdot 3, \cdots\cdots, 2\cdot 35\}$ より $n(A) = 35$
$B = \{3\cdot 1, 3\cdot 2, 3\cdot 3, \cdots\cdots, 3\cdot 23\}$ より $n(B) = 23$
このとき，$A\cap B$ は 6 の倍数の集合を表すから
$A\cap B = \{6\cdot 1, 6\cdot 2, 6\cdot 3, \cdots\cdots, 6\cdot 11\}$
より $n(A\cap B) = 11$
すると，2 または 3 の倍数の集合は $A\cup B$ と表されるから，その要素の個数は
$n(A\cup B) = n(A)+n(B)-n(A\cap B)$
$= 35+23-11 = \underline{\underline{47\text{（個）}}}$

(3) (ア) 真 〔$x = 3$ のとき $7x-2 = 7\times 3-2 = 19$
すなわち，$7x-2 = 19$ が成り立つ〕
(イ) 偽 〔反例：$x = 1$，$y = 0$〕
(ウ) 偽 〔反例：$a = 2$，$b = 1$，$c = -1$〕
(エ) 真 〔正方形の集合は長方形の集合に含まれる〕
したがって，真である命題は $\underline{\underline{\text{(ア)と(エ)}}}$

(4) 命題「$p \Rightarrow q$」の対偶は「$\overline{q} \Rightarrow \overline{p}$」
であるから，命題「$x = 9 \Rightarrow x^2 = 81$」の対偶は $\underline{\underline{\text{「}x^2 \neq 81 \Rightarrow x \neq 9\text{」}}}$

(5) 命題「$p \Rightarrow q$」について
「$a+b = 0$」⇒「$a = 1$ かつ $b = -1$」は偽
〔反例：「$a = -1$ かつ $b = 1$」〕
命題「$q \Rightarrow p$」について
「$a = 1$ かつ $b = -1$」⇒「$a+b = 0$」は真
したがって，p は q であるための $\underline{\underline{\text{必要条件}}}$ である。

平成18年度　春季県下一斉学力テスト $\boxed{\text{S II } \alpha}$ 解答 No.3

［α－8］場合の数と確率

(1)　1つの四角形は8個の点から4個を選んで線で結べばできるから，できる四角形の個数は

$${}_8C_4=\frac{8\cdot7\cdot6\cdot5}{4\cdot3\cdot2\cdot1}=\underline{\underline{70\text{（個）}}}$$

(2)　女子3人を1人と考え，男子3人と合わせて，4人を並べると考える。すると，その並び方は4! 通り。そのそれぞれの並び方について，女子3人の並び方は3! 通りずつあるから，積の法則により

$4!\times3!=4\cdot3\cdot2\cdot1\times3\cdot2\cdot1=\underline{\underline{144\text{（通り）}}}$

(3)　事象「少なくとも1人は当たりを引く」は，事象 A「2人ともはずれを引く」の余事象 $\overline{A}$ である。

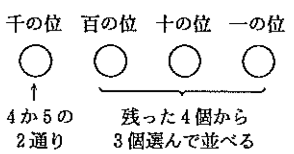
事象 A の確率は $\dfrac{7}{10}\times\dfrac{7}{10}=\dfrac{49}{100}$

したがって，事象 $\overline{A}$ の確率は $1-\dfrac{49}{100}=\underline{\underline{\dfrac{51}{100}}}$

(4)　箱の中の10個の球から3個を取り出す方法は ${}_{10}C_3$ 通りある。このうち，赤球2個，白球1個を取り出す場合は ${}_4C_2\times{}_6C_1$ 通りであるから，求める確率は

$$\frac{{}_4C_2\times{}_6C_1}{{}_{10}C_3}=\frac{\dfrac{4\cdot3}{2\cdot1}\times\dfrac{6}{1}}{\dfrac{10\cdot9\cdot8}{3\cdot2\cdot1}}=\frac{2\cdot3\times6}{10\cdot3\cdot4}=\underline{\underline{\frac{3}{10}}}$$

(5)



千の位は4か5の2通りの選び方がある。
百の位，十の位，一の位には，残った4個の数字から3個を選んで並べればよいから

$2\times{}_4P_3=2\times4\cdot3\cdot2=\underline{\underline{48\text{（個）}}}$

［α－9］方程式と不等式

(1)　$x^2+2x-8=0$ の左辺を因数分解して

$(x+4)(x-2)=0$

したがって　$\underline{\underline{x=-4,\ 2}}$

(2)　$\dfrac{2}{3}x-6<\dfrac{3x-2}{2}$ の両辺に6をかけて

$$6\times\left(\frac{2}{3}x-6\right)<6\times\frac{3x-2}{2}$$
$$4x-36<3(3x-2)$$
$$4x-36<9x-6$$
$$4x-9x<-6+36$$
$$-5x<30$$

両辺を -5 で割って $\underline{\underline{x>-6}}$

(3)
$$\frac{2}{2+\sqrt2}=\frac{2(2-\sqrt2)}{(2+\sqrt2)(2-\sqrt2)}=\frac{2(2-\sqrt2)}{2^2-(\sqrt2)^2}=\frac{2(2-\sqrt2)}{4-2}=\frac{2(2-\sqrt2)}{2}=\underline{\underline{2-\sqrt2}}$$

(4)　$A+B-C$
$=(x-5y+1)+(4x+2y+3)-(-3x-y+4)$
$=x-5y+1+4x+2y+3+3x+y-4$
$=x+4x+3x-5y+2y+y+1+3-4$
$=\underline{\underline{8x-2y}}$

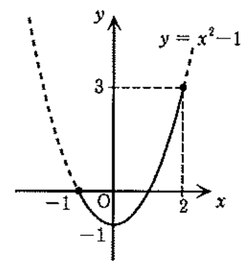
(5)　$ab+a+2b+2=(b+1)a+2(b+1)$
$=(b+1)(a+2)$
$=\underline{\underline{(a+2)(b+1)}}$

［α－10］2次関数（2次不等式は除く）

(1)　2次関数 $y=a(x-p)^2+q$ のグラフの頂点の座標は $(p,\ q)$ である。
したがって，$y=-(x-1)^2+3$ の頂点の座標は $\underline{\underline{(1,\ 3)}}$

(2)　放物線 $y=x^2-7x+10$ と x 軸との交点の x 座標は，方程式 $x^2-7x+10=0$ の解である。
左辺を因数分解して $(x-2)(x-5)=0$
したがって　$x=\underline{\underline{2,\ 5}}$

(3)　$y=x^2-1$ の $-1\leqq x\leqq2$ におけるグラフは，右図の実線部分のようになる。
したがって，値域は
$-1\leqq y\leqq3$
ゆえに　$\underline{\underline{a=-1,\ b=3}}$



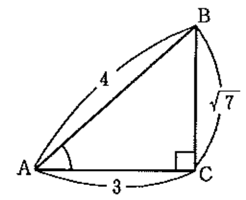
(4)　求める2次関数のグラフは点 $(2,\ 3)$ を頂点とするから，その式は
$y=a(x-2)^2+3$
と表される。このグラフが点 $(3,\ 5)$ を通るから，$x=3$，$y=5$ を代入して，式が成り立つ。
すなわち $5=a(3-2)^2+3$
$5=a+3$
$a=2$
ゆえに，求める2次関数は
$\underline{\underline{y=2(x-2)^2+3}}$　〔$y=2x^2-8x+11$ も可〕

(5)　方程式 $x^2+6x+a=0$ が異なる2つの実数解をもてばよいから，係数について $6^2-4\cdot1\cdot a>0$ が成り立てばよい。
すなわち $36-4a>0$
$-4a>-36$
ゆえに　$\underline{\underline{a<9}}$

［α－11］図形と計量

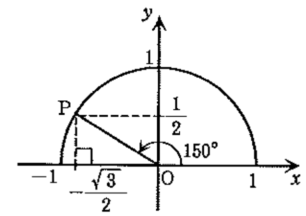
(1)　図の直角三角形より

$\tan A=\underline{\underline{\dfrac{\sqrt7}{3}}}$



(2)　右図の点Pの y 座標が $\sin150^\circ$ の値であるから

$\sin150^\circ=\underline{\underline{\dfrac{1}{2}}}$



(3)　三角形ABCの面積を S とすると，S は

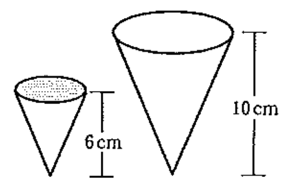
$S=\dfrac{1}{2}ca\sin B$

〔ただし，$c=\mathrm{AB}$，$a=\mathrm{BC}$，$B=\angle\mathrm{B}$〕で求められる。したがって

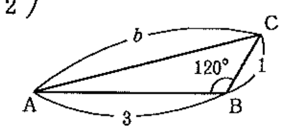
$S=\dfrac{1}{2}\cdot3\cdot4\cdot\sin60^\circ$

$=\dfrac{1}{2}\cdot3\cdot4\cdot\dfrac{\sqrt3}{2}=\underline{\underline{3\sqrt3}}$

(4)　入っている水の形状は容器と相似な円すいであり，その相似比は
$6:10=3:5$
したがって，水の体積と容器全体の容積の比は $3^3:5^3=\underline{\underline{27:125}}$



(5)　余弦定理により
$b^2=3^2+1^2-2\cdot3\cdot1\cos120^\circ$
$=9+1-2\cdot3\cdot1\cdot\left(-\dfrac{1}{2}\right)$
$=13$
$b>0$ より $\underline{\underline{b=\sqrt{13}}}$



平成18年度　春季県下一斉学力テスト $\boxed{\mathrm{S\,II}\,\beta}$ 解答 No.1

β共通問題

(1) 解と係数の関係により $\alpha+\beta=-2$，$\alpha\beta=3$
したがって
$$\begin{aligned}(\alpha-1)(\beta-1)&=\alpha\beta-\alpha-\beta+1\\&=\alpha\beta-(\alpha+\beta)+1\\&=3-(-2)+1\\&=\underline{\underline{6}}\end{aligned}$$

(2) $\dfrac{x}{3}=\dfrac{y}{5}=\dfrac{z}{2}=k$ とすると
$x=3k$，$y=5k$，$z=2k$　　$(k\neq 0)$
よって
$$\begin{aligned}\frac{x^2+y^2-z^2}{x^2-y^2+z^2}&=\frac{(3k)^2+(5k)^2-(2k)^2}{(3k)^2-(5k)^2+(2k)^2}\\&=\frac{30k^2}{-12k^2}\\&=\underline{\underline{-\frac{5}{2}}}\end{aligned}$$

(3) $x^2+y^2+4x-2ky-4=0$ より
$x^2+4x+y^2-2ky-4=0$
$(x+2)^2-4+(y-k)^2-k^2-4=0$
$(x+2)^2+(y-k)^2=k^2+8$
この方程式が半径3の円を表すとき
$$\begin{aligned}k^2+8&=3^2\\k^2&=1\\\underline{\underline{k}}&\underline{\underline{=\pm1}}\end{aligned}$$

(4) 2倍角の公式 $\cos2\theta=1-2\sin^2\theta$ を
$\cos2\theta=\sin\theta$ に代入して
$1-2\sin^2\theta=\sin\theta$
よって，$2\sin^2\theta+\sin\theta-1=0$
$(\sin\theta+1)(2\sin\theta-1)=0$
$$\sin\theta=-1,\ \frac{1}{2}$$
$0\leqq\theta<2\pi$ より
$\sin\theta=-1$ を満たす θ は $\theta=\dfrac{3}{2}\pi$
$\sin\theta=\dfrac{1}{2}$ を満たす θ は $\theta=\dfrac{\pi}{6}$，$\dfrac{5}{6}\pi$
したがって，$\underline{\underline{\theta=\dfrac{\pi}{6},\ \dfrac{5}{6}\pi,\ \dfrac{3}{2}\pi}}$

(5) 2倍角の公式　$\sin2\theta=2\sin\theta\cos\theta$ を用いて
$$\begin{aligned}\sin15^\circ\cos15^\circ&=\frac{1}{2}\times2\sin15^\circ\cos15^\circ\\&=\frac{1}{2}\sin(2\times15^\circ)\\&=\frac{1}{2}\sin30^\circ\\&=\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}\\&=\underline{\underline{\frac{1}{4}}}\end{aligned}$$

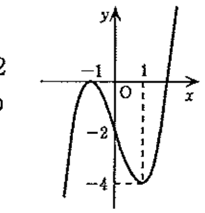
(6) $\left(\dfrac{1}{2}\right)^{x+1}>8$ より
$(2^{-1})^{x+1}>2^3$
$2^{-x-1}>2^3$
底2は1より大きいから
$-x-1>3$
$-x>4$
ゆえに　$\underline{\underline{x<-4}}$

(7) $\log_{10}3^{40}=40\log_{10}3$
$=40\times0.4771$
$=19.084$
よって $19\leqq\log_{10}3^{40}<20$
$\log_{10}10^{19}\leqq\log_{10}3^{40}<\log_{10}10^{20}$
底10は1より大きいから
$10^{19}\leqq3^{40}<10^{20}$
したがって，3^{40} は $\underline{\underline{20桁の整数}}$である。

(8) 方程式 $x^3-3x-2=a$ が異なる
2つの実数解をもつための条件は，
関数 $y=x^3-3x-2$ のグラフと直線 $y=a$ が
2つの共有点をもつことである。
$y=x^3-3x-2$ より
$y'=3x^2-3=3(x+1)(x-1)$
したがって，この関数の増減は次の表のようになる。

x	$\cdots$	-1	$\cdots$	1	$\cdots$
y'	$+$	0	$-$	0	$+$
y	↗	0	↘	-4	↗

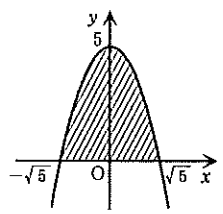
したがって，この関数のグラフは右図のようになるから，このグラフと直線 $y=a$ が2つの共有点をもつときの a の値は $\underline{\underline{a=-4,\ 0}}$



(9) 接点を $\mathrm{P}(x_1,\ y_1)$ とすると，Pは円 $x^2+y^2=13$ 上の点であるから
$x_1^2+y_1^2=13$ … ①
また，点Pにおける円の接線の方程式は
$x_1x+y_1y=13$ … ②
この直線が点 $(5,\ 1)$ を通るから
$5x_1+y_1=13$
よって，$y_1=-5x_1+13$ … ③
①，③から y_1 を消去して
$$\begin{aligned}x_1^2+(-5x_1+13)^2&=13\\26x_1^2-130x_1+156&=0\\x_1^2-5x_1+6&=0\\(x_1-2)(x_1-3)&=0\\x_1&=2,\ 3\end{aligned}$$
これらを③に代入して
$x_1=2$ のとき $y_1=3$
$x_1=3$ のとき $y_1=-2$
したがって，②より，求める直線の方程式は
$\underline{\underline{2x+3y=13,\ 3x-2y=13}}$　⑩

(10)(ア) 方程式 $-x^2+5=0$ を解けばよいから
$x^2=5$ より
$\underline{\underline{x=\pm\sqrt{5}}}$　②

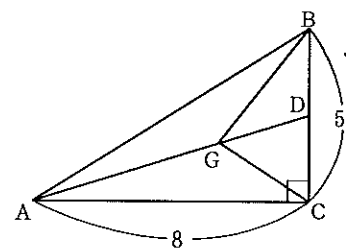
(イ) この放物線と x 軸とで囲まれた部分は下図の斜線部分であるから，求める面積を S とすると
$$\begin{aligned}S&=\int_{-\sqrt5}^{\sqrt5}(-x^2+5)dx\\&=2\int_0^{\sqrt5}(-x^2+5)dx\\&=2\left[-\frac{x^3}{3}+5x\right]_0^{\sqrt5}\\&=2\left(-\frac{5\sqrt5}{3}+5\sqrt5\right)\\&=\underline{\underline{\frac{20\sqrt5}{3}}}\end{aligned}$$
⑧



β選択問題

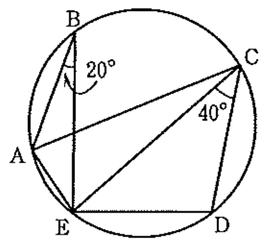
[β−1] 平面図形

(1) 線分AGの延長線と辺BCとの交点をDとする。
点Gは重心だから，
点DはBCの中点となる。
よって，$\mathrm{BD}=\mathrm{DC}$
$\triangle\mathrm{ABD}$ と $\triangle\mathrm{ACD}$において底辺が等しく，高さが等しいから
$\triangle\mathrm{ABD}=\triangle\mathrm{ACD}$
よって
$\triangle\mathrm{ABD}=\dfrac{1}{2}\triangle\mathrm{ABC}$
また，$\mathrm{AG}:\mathrm{GD}=2:1$ より
$\triangle\mathrm{ABG}=2\triangle\mathrm{BGD}$
したがって，
$$\begin{aligned}\triangle\mathrm{ABG}&=\frac{2}{3}\triangle\mathrm{ABD}=\frac{2}{3}\times\frac{1}{2}\triangle\mathrm{ABC}\\&=\frac{1}{3}\triangle\mathrm{ABC}\end{aligned}$$
ここで
$\triangle\mathrm{ABG}=\dfrac{1}{2}\times8\times5=20$ より
$\triangle\mathrm{ABG}=\dfrac{1}{3}\triangle\mathrm{ABC}=\underline{\underline{\dfrac{20}{3}}}$

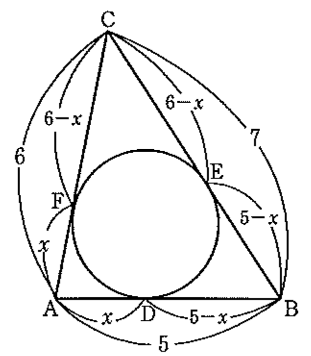


平成18年度　春季県下一斉学力テスト $\boxed{\text{S II }\beta}$ 解答 No. 2

(2) 点Aと点Cを結ぶ。
$\overset{\frown}{\mathrm{AE}}$ に対する円周角より
$\angle \mathrm{ACE} = \angle \mathrm{ABE} = 20^\circ$
$\angle \mathrm{ACD} = \angle \mathrm{ACE} + \angle \mathrm{ECD} = 20^\circ + 40^\circ = 60^\circ$
また, 四角形AEDCは円に内接しているので,
$\angle \mathrm{AED} + \angle \mathrm{ACD} = 180^\circ$
よって,
$\angle \mathrm{AED} = 180^\circ - \angle \mathrm{ACD} = 180^\circ - 60^\circ = \underline{\underline{120^\circ}}$



(3) この円と辺BC, 辺CAの接点をE, Fとし,
$\mathrm{AD} = x$ とすると,
$\mathrm{AD} = \mathrm{AF}$, $\mathrm{BD} = \mathrm{BE}$, $\mathrm{CE} = \mathrm{CF}$
であるから
$\mathrm{BE} = \mathrm{BD} = 5 - x$
$\mathrm{CE} = \mathrm{CF} = 6 - x$
よって,
$\mathrm{BE} + \mathrm{CE} = \mathrm{BC}$
より, $(5-x) + (6-x) = 7$
$11 - 2x = 7$, $x = 2$
したがって, $\mathrm{AD} = \underline{\underline{2}}$



(4) 三角形の角の二等分線に関する定理より
$\mathrm{BD} : \mathrm{DC} = \mathrm{AB} : \mathrm{AC} = 6 : 10 = 3 : 5$
よって, $\mathrm{BD} = \frac{3}{3+5} \times 8 = 3$
△ABDにおいて, 三平方の定理より
$\mathrm{AD} = \sqrt{\mathrm{AB}^2 + \mathrm{BD}^2} = \sqrt{6^2 + 3^2} = \underline{\underline{3\sqrt{5}}}$

[β−2] 集合と論理

(1)(ア) 真 ($x = 3$ のとき $7x - 2 = 7 \times 3 - 2 = 19$
すなわち, $7x - 2 = 19$ が成り立つ)
(イ) 偽 (反例 : $x = 1$, $y = 0$)
(ウ) 偽 (反例 : $a = 2$, $b = 1$, $c = -1$)
(エ) 真 ($x^2 - 3x + 2 > 0$ を解くと
$(x-1)(x-2) > 0$ より $x < 1$, $2 < x$)
(オ) 偽 (反例 : AB = DC = 1, AD = BC = 2
となる長方形)
したがって, 真である命題は, $\underline{\underline{(ア), (エ)}}$

(2) 命題「$p \Rightarrow q$」の対偶は「$\overline{q} \Rightarrow \overline{p}$」
であるから, 命題「$x = 9 \Rightarrow x^2 = 81$」の対偶は
$\underline{\underline{「x^2 \neq 81, \Rightarrow x \neq 9」}}$

(3) ド・モルガンの法則により
$\overline{A} \cap \overline{B} = \overline{A \cup B}$
ここで, $A \cup B = \{1, 3, 4, 5, 6, 8, 12\}$ より,
$\overline{A} \cap \overline{B} = \overline{A \cup B} = \underline{\underline{\{2, 7, 9, 10, 11\}}}$

(4) 100から200までの自然数のうち,
2の倍数の集合をA, 7の倍数の集合をBとすると
$A = \{2 \cdot 50, 2 \cdot 51, 2 \cdot 52, \cdots\cdots, 2 \cdot 100\}$ より
$n(A) = 100 - 49 = 51$
$B = \{7 \cdot 15, 7 \cdot 16, 7 \cdot 17, \cdots\cdots, 7 \cdot 28\}$ より
$n(B) = 28 - 14 = 14$
このとき, $A \cap B$ は14の倍数を表すから
$A \cap B = \{14 \cdot 8, 14 \cdot 9, 14 \cdot 10, \cdots\cdots, 14 \cdot 14\}$ より
$n(A \cap B) = 14 - 7 = 7$
すると, 2または7の倍数の集合は
$A \cup B$ と表されるから, その要素の個数は
$n(A \cup B) = n(A) + n(B) - n(A \cap B)$
$= 51 + 14 - 7 = \underline{\underline{58}}$

[β−3] 場合の数と確率

(1) 千, 百, 十の位にくる数は, 1, 2, 3の3通り。
一の位にくる数は, 1, 3の2通り。
よって, 求める場合の数は,
$3 \times 3 \times 3 \times 2 = \underline{\underline{54\ (通り)}}$

(2) 2つの2人のグループを区別して, 2人, 2人, 1人の3つのグループA, B, Cに分ける方法は,
${}_5C_2 \times {}_3C_2$ (通り)
ここで, 2つの2人のグループA, Bの区別をなくすと 2! (通り) ずつ同じ分け方があるから,
求める方法の総数は,
$$\frac{{}_5C_2 \times {}_3C_2}{2!} = \frac{\frac{5 \times 4}{2 \times 1} \times \frac{3 \times 2}{2 \times 1}}{2 \times 1} = \underline{\underline{15\ (通り)}}$$

(3) 男子3人, 女子3人の並べ方は,
${}_6P_6$ (通り)
まず, 女子3人を1人とみなして, 男子3人と合わせて24人の並べ方は
${}_4P_4$ (通り)
そのおのおのに対して, 女子3人の並べ方は
${}_3P_3$ (通り)
よって, 女子3人が続いて並ぶ総数は,
${}_4P_4 \times {}_3P_3$ (通り)
すなわち, 求める確率は,
$$\frac{{}_4P_4 \times {}_3P_3}{{}_6P_6} = \frac{4! \times 3!}{6!} = \underline{\underline{\frac{1}{5}}}$$

(4) 赤球3個, 白球4個が入った箱の中から3個の球を取り出す取り出し方は,
${}_7C_3$ (通り)
このうち, 赤球1個, 白球2個または赤球0個, 白球3個を取り出す取り出し方は,
${}_3C_1 \times {}_4C_2 + {}_4C_3 = 3 \times 6 + 4 = 22$ (通り)
すなわち, 求める確率は,
$$\frac{{}_3C_1 \times {}_4C_2 + {}_4C_3}{{}_7C_3} = \frac{22}{\frac{7 \times 6 \times 5}{3 \times 2 \times 1}} = \underline{\underline{\frac{22}{35}}}$$

[β−4] 数　列

(1) $\frac{1}{4}$, x, $\frac{1}{2}$, …… が等差数列であるから,
$2x = \frac{1}{4} + \frac{1}{2}$ より $2x = \frac{3}{4}$
ゆえに $\underline{\underline{x = \frac{3}{8}}}$

(2) $a_1 = 3$, $a_{n+1} = 2a_n$ ($n = 1, 2, 3, \cdots\cdots$)
で定められる数列 $\{a_n\}$ は, 初項3, 公比2の等比数列であるから, その一般項a_nは
$\underline{\underline{a_n = 3 \cdot 2^{n-1}}}$

(3) $1000 \div 6$ の商は166, 余りは4であるから,
1000は167行目の4番目に並ぶ数であり,
奇数行の数は左から順に並ぶから
(167, d)
と表せる。
したがって, $\underline{\underline{ア\ 167,\ イ\ d}}$

(4) 数列 1, $1+3$, $1+3+5$, $1+3+5+7$, ……
の第k項をa_kとすると
$a_k = 1 + 3 + 5 + \cdots + (2k-1)$
これは, 初項1, 末項$2k-1$, 項数kの等差数列の和であるから
$a_k = \frac{1}{2}k\{1 + (2k-1)\} = k^2$
したがって, 数列 1, $1+3$, $1+3+5$, …… の初項から第n項までの和は
$$\sum_{k=1}^{n} k^2 = \underline{\underline{\frac{1}{6}n(n+1)(2n+1)}}$$

平成18年度　春季県下一斉学力テスト $\boxed{\text{S II }\beta}$ 解答 No. 3

[β−5] ベクトル

(1) A$(-1,\ -10)$, B$(2,\ -a)$, C$(a,\ 0)$ であるから

$\overrightarrow{AB}=(2+1,\ -a+10)=(3,\ -a+10)$

$\overrightarrow{AC}=(a+1,\ 0+10)=(a+1,\ 10)$

したがって，$\overrightarrow{AB}=\dfrac{1}{2}\overrightarrow{AC}$ となる場合は

$2\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{AC}$ より $2(3,\ -a+10)=(a+1,\ 10)$

すなわち　$(6,\ -2a+20)=(a+1,\ 10)$

よって，$6=a+1$，$-2a+20=10$

これを解いて $\underline{a=5}$

(2) $-3\vec{a}+2\vec{b}=-3(3,\ -7)+2(5,\ -11)=(1,\ -1)$

したがって，$\left|-3\vec{a}+2\vec{b}\right|=\sqrt{1^2+(-1)^2}=\underline{\underline{\sqrt{2}}}$

(3) $(\vec{a}+\vec{b})\perp(5\vec{a}-2\vec{b})$ ならば

$(\vec{a}+\vec{b})\cdot(5\vec{a}-2\vec{b})=0$

$5|\vec{a}|^2+3\vec{a}\cdot\vec{b}-2|\vec{b}|^2=0$

$5\times1^2+3\vec{a}\cdot\vec{b}-2\times2^2=0$

よって，$\vec{a}\cdot\vec{b}=1$

したがって，$\cos\theta=\dfrac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{|\vec{a}||\vec{b}|}=\dfrac{1}{1\times2}=\dfrac{1}{2}$

$0^\circ\leqq\theta\leqq180^\circ$ より $\underline{\underline{\theta=60^\circ}}$

(4) $\vec{a}=(1,\ 1,\ -3)$，$\vec{b}=(0,\ 2,\ -2)$

$\vec{p}=\vec{a}+t\vec{b}=(1,\ 1,\ -3)+t(0,\ 2,\ -2)$

$\qquad=(1,\ 1+2t,\ -3-2t)$

よって

$|\vec{p}|^2=1^2+(1+2t)^2+(-3-2t)^2$

$\qquad=8t^2+16t+11$

$\qquad=8(t+1)^2+3$

したがって，$|\vec{p}|$ は $t=-1$ のときに最小で，

最小値は $\underline{\underline{\sqrt{3}}}$

[β−6] 数学II①

(1) $(2k+1)x-(k-2)y+3k-1=0$ より

$(2x-y+3)k+(x+2y-1)=0$

したがって，この等式がどんな k の値に対しても成り立つための条件は

$2x-y+3=0$ かつ $x+2y-1=0$

連立方程式を解いて $\underline{\underline{x=-1,\ y=1}}$

(2) $2\log_2 3+\log_2 12-\log_2 27$

$=\log_2 3^2+\log_2 12-\log_2 27$

$=\log_2\dfrac{3^2\times12}{27}=\log_2 4=\underline{\underline{2}}$

(3) $y=x^2+x$ より $y'=2x+1$

よって，放物線 $y=x^2+x$ 上の点 $(a,\ a^2+a)$ における接線の傾きは $2a+1$

接線が直線 $y=3x+1$ に平行ならば，その傾きは3であるから $2a+1=3$ より $a=1$

このとき，接点の座標は $(1,\ 2)$ であるから，求める接線の方程式は $y-2=3(x-1)$

すなわち $\underline{\underline{y=3x-1}}$

(4) 点 $(2,\ 4)$ が円 $x^2+y^2=r^2$ 上にあるから

$2^2+4^2=r^2$

よって $r^2=20$

すると，連立方程式 $\begin{cases}x^2+y^2=20\\ y=x+2\end{cases}$

を解いて $\begin{cases}x=2\\ y=4\end{cases}$，$\begin{cases}x=-4\\ y=-2\end{cases}$

したがって，円 $x^2+y^2=20$ と直線 $y=x+2$ の共有点のうち，点 $(2,\ 4)$ の他の点の座標は

$\underline{\underline{(-4,\ -2)}}$

[β−7] 数学II②

(1) 2次方程式 $x^2+4=0$ の解は $x=\pm2i$ である。

係数が実数である方程式において，ある複素数が解であるならば，その複素数と共役な複素数も解になる。したがって $2i$ が共通の解であるならば $-2i$ も共通の解であるから，$2i$ が解である場合についてのみ調べればよい。

3次方程式 $2x^3+3x^2+ax+12=0$ の解が $2i$ ならば

$2\cdot(2i)^3+3\cdot(2i)^2+a\cdot2i+12=0$

$2(a-8)i=0$

ゆえに $\underline{\underline{a=8}}$

(2) $f(a)=\displaystyle\int_0^1(6ax^2-2a^2x+3)dx$

$=\Big[2ax^3-a^2x^2+3x\Big]_0^1$

$=2a-a^2+3$

$=-(a-1)^2+4$

したがって，$f(a)$ について

$\underline{\underline{\text{最大値}4\quad(a=1\ \text{のとき})}}$

(3) 2直線 $2x+3y+1=0$，$3x+5y+1=0$ の交点を通る直線の方程式は，定数 k を用いて

$2x+3y+1+k(3x+5y+1)=0$

と表される。この直線が点 $(4,\ -1)$ を通る場合

$2\cdot4+3\cdot(-1)+1+k\{3\cdot4+5\cdot(-1)+1\}=0$

よって，$k=-\dfrac{3}{4}$

したがって，求める直線の方程式は

$2x+3y+1-\dfrac{3}{4}(3x+5y+1)=0$

ゆえに $\underline{\underline{x+3y-1=0}}$

(4) $0<\alpha<\dfrac{\pi}{2}$，$0<\beta<\dfrac{\pi}{2}$ であるから

$0<\alpha+\beta<\pi$ … ①

このとき，$\tan\alpha=2$，$\tan\beta=3$ であるから

$\tan(\alpha+\beta)=\dfrac{\tan\alpha+\tan\beta}{1-\tan\alpha\tan\beta}=\dfrac{2+3}{1-2\times3}=-1$

① より $\underline{\underline{\alpha+\beta=\dfrac{3}{4}\pi}}$　〔135° も可〕