SⅡβ 共通問題　各4点　15題　計60点

(1) 二項定理より $(2x+1)^6$ の展開式における x^2 の項は　${}_6C_2(2x)^2\cdot1^{6-2}=\dfrac{6\cdot5}{2\cdot1}4x^2=60x^2$

　よって，$(2x+1)^6$ の展開式における x^2 の係数は　60

(2)　$(\text{与式})=\dfrac{(x-5)(x+2)}{(2x+1)(x+2)}\div\dfrac{(x+4)(x-3)}{(2x+1)(x-3)}=\dfrac{(x-5)(x+2)}{(2x+1)(x+2)}\times\dfrac{(2x+1)(x-3)}{(x+4)(x-3)}=\dfrac{x-5}{x+4}$

(3)　条件から $3x^3-2x^2-7x+4=B(x^2-x-2)+6$

　すなわち $B=(3x^3-2x^2-7x-2)\div(x^2-x-2)$

　よって，次の計算より　$B=3x+1$

$$\begin{array}{r}
3x+1\\
x^2-x-2\,\overline{)\,3x^3-2x^2-7x-2}\\
\underline{3x^3-3x^2-6x}\\
x^2-\ x-2\\
\underline{x^2-\ x-2}\\
0
\end{array}$$

(4)　$(\text{与式})=\dfrac{(1-2i)^2}{(1+2i)(1-2i)}-\dfrac{(1+2i)^2}{(1-2i)(1+2i)}=\dfrac{-3-4i}{5}-\dfrac{-3+4i}{5}=-\dfrac{8}{5}i$

(5) $1+i$ が解であるから $(1+i)^3+a(1+i)+b=0$　整理して　$(a+b-2)+(a+2)i=0$

a ,b が実数であるから，$a+b-2$, $a+2$ は実数である。

よって　$a+b-2=0$，$a+2=0$　これを解くと　$a=-2$, $b=4$

3次方程式は　$x^3-2x+4=0$

$P(x)=x^3-2x+4$ とすると，$P(-2)=-8+4+4=0$ であるから，

$P(x)=(x+2)(x^2-2x+2)$　$P(x)=0$ とすると，$x=-2$, $1\pm i$

したがって，求める他の解は　-2 , $1-i$

(6)　図より　$\begin{cases}x^2+(y-2)^2<4\\x^2+(y-1)^2>1\end{cases}$

(7)　直線と原点の距離を d とすると $d=\sqrt{10}$

　直線の方程式を変形すると $3x-y+a=0$ から，

　点と直線の距離の公式より　$d=\dfrac{|3\cdot0-0+a|}{\sqrt{3^2+(-1)^2}}=\dfrac{|a|}{\sqrt{10}}$

　$d=\sqrt{10}$ から $\dfrac{|a|}{\sqrt{10}}=\sqrt{10}$　よって，$a=\pm10$

(8)　外分点Cの座標は

$$\left(\frac{-2\times4+3\times3}{3-2},\ \frac{-2\times(-2)+3\times1}{3-2}\right)\ \text{より}\quad(1,\ 7)$$

(9)　求める円の方程式を $x^2+y^2+lx+my+n=0$ とする。

　点Aを通るから　$1^2+1^2+l+m+n=0$

　点Bを通るから　$3^2+1^2+3l+m+n=0$

　点Cを通るから　$(-1)^2+(-1)^2-l-m+n=0$

整理すると　$l+m+n+2=0$

　　　　　$3l+m+n+10=0$

　　　　　$-l-m+n+2=0$

これを解いて　$l=-4$，$m=4$，$n=-2$

よって求める円の方程式は　$x^2+y^2-4x+4y-2=0$

すなわち　$(x-2)^2+(y+2)^2=10$

したがって，円の中心の座標は (2 , -2) ，半径は $\sqrt{10}$

(10)　A：$-\dfrac{\pi}{2}$，B：π

　Cの値は　$\tan\theta=-1\ \left(\dfrac{\pi}{2}<\theta<\pi\right)$ を解くと　$\theta=\dfrac{3}{4}\pi$　よって　C: $\dfrac{3}{4}\pi$

(11)　$0<\alpha<\dfrac{\pi}{2}$ より，$\cos\alpha>0$ であるから

$\cos\alpha=\sqrt{1-\sin^2\alpha}=\sqrt{1-\left(\dfrac{2}{3}\right)^2}=\dfrac{\sqrt5}{3}$

$\dfrac{\pi}{2}<\beta<\pi$ より，$\cos\beta<0$ であるから

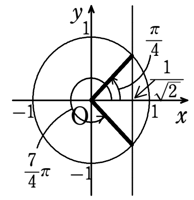
$\cos\beta=-\sqrt{1-\sin^2\beta}=-\sqrt{1-\left(\dfrac{4}{5}\right)^2}=-\dfrac{3}{5}$

よって，$\cos(\alpha+\beta)=\cos\alpha\cos\beta-\sin\alpha\sin\beta=\dfrac{\sqrt5}{3}\cdot\left(-\dfrac{3}{5}\right)-\dfrac{2}{3}\cdot\dfrac{4}{5}=-\dfrac{3\sqrt5+8}{15}$

(12)　不等式を変形して，$\cos\theta\geqq\dfrac{1}{\sqrt2}$

$0\leqq\theta<2\pi$ の範囲で $\cos\theta=\dfrac{1}{\sqrt2}$ となる θ は　$\theta=\dfrac{\pi}{4}$，$\dfrac{7}{4}\pi$

よって，不等式の解は，$0\leqq\theta\leqq\dfrac{\pi}{4}$ ，$\dfrac{7}{4}\pi\leqq\theta<2\pi$



(13)　$(\text{与式})=-2^3\div2^{-1}\times2=-2^{3-(-1)+1}=-2^5=-32$

(14)　6^{20} の常用対数を計算すると

$\log_{10}6^{20}=20\log_{10}6=20(\log_{10}2+\log_{10}3)=20(0.3010+0.4771)=15.562$

となり　$15<\log_{10}6^{20}<16$　よって　$10^{15}<6^{20}<10^{16}$　ゆえに，6^{20} の桁数は16桁 である。

(15)　$(\text{与式})=\log_2 5\cdot\dfrac{\log_2 8}{\log_2 5}=\log_2 8=3$

[β−1　三角関数]　(1)，(2)各5点，(3)（ア）3点（イ）7点　計20点

(1)　$\sin^2\dfrac{\pi}{8}=\dfrac{1-\cos\dfrac{\pi}{4}}{2}=\dfrac12\left(1-\dfrac{\sqrt2}{2}\right)=\dfrac{2-\sqrt2}{4}$

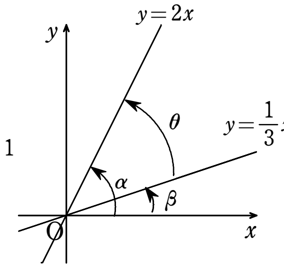
　$\sin\dfrac{\pi}{8}>0$ より　$\sin\dfrac{\pi}{8}=\sqrt{\dfrac{2-\sqrt2}{4}}=\dfrac{\sqrt{2-\sqrt2}}{2}$

(2)　x 軸の正の部分から2直線 $y=2x$，$y=\dfrac13x$ まで測った角を，それぞれ α，β とすると，$\theta=\alpha-\beta$ である。

$\tan\alpha=2$，$\tan\beta=\dfrac13$　であるから

$\tan\theta=\tan(\alpha-\beta)=\dfrac{\tan\alpha-\tan\beta}{1+\tan\alpha\tan\beta}=\dfrac{2-\dfrac13}{1+2\cdot\dfrac13}=1$

$0\leqq\theta\leqq\dfrac{\pi}{2}$ であるから　$\theta=\dfrac{\pi}{4}$



(3)

（ア）$\sqrt3\sin\theta+\cos\theta=2\left(\sin\theta\times\dfrac{\sqrt3}{2}+\cos\theta\times\dfrac12\right)$

$=2\left(\sin\theta\cos\dfrac{\pi}{6}+\cos\theta\sin\dfrac{\pi}{6}\right)$

$=2\sin\left(\theta+\dfrac{\pi}{6}\right)$　であるから

$y=2\sin\left(\theta+\dfrac{\pi}{6}\right)$

（イ）$0\leqq\theta<2\pi$ のとき，$\dfrac{\pi}{6}\leqq\theta+\dfrac{\pi}{6}<\dfrac{13}{6}\pi$ であるから　$-1\leqq\sin\left(\theta+\dfrac{\pi}{6}\right)\leqq1$

　よって，$-2\leqq y\leqq2$

　したがって　y の最大値は2，最小値は -2

[β−2　微分法と積分法]　(1)，(2)各5点，(3)（ア）3点（イ）7点　計20点

(1)　(与式)$=\lim_{x\to1}\frac{(x+2)(x-1)}{x-1}=\lim_{x\to1}(x+2)=3$

(2)　与えられた方程式を変形すると　$x^3-3x+1=a$

よって，この方程式が異なる３つの実数解をもつのは，３次関数

$y=x^3-3x+1$　……①

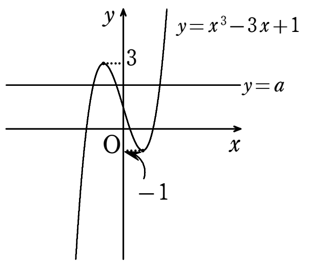
のグラフと直線 $y=a$ が，３個の共有点をもつときである。

関数①を微分すると　$y'=3x^2-3=3(x+1)(x-1)$

$y'=0$ とすると　$x=\pm1$

y の増減表は次のようになる。

x	……	-1	……	1	……
y'	$+$	0	$-$	0	$+$
y	↗	極大 3	↘	極小 -1	↗



ゆえに，関数①のグラフは，図のようになる。

よって，求める a の値の範囲は，図から

$-1<a<3$

(3)

（ア）$C_1: y=x^2-5x+7$　……①　　$C_2: y=x^2+3x-1$ ……②　とする。

①から　$y'=2x-5$

よって，C_1 上の点 $(s,\ s^2-5s+7)$ における接線の方程式は

$y-(s^2-5s+7)=(2s-5)(x-s)$

すなわち　$y=(2s-5)x-s^2+7$　……③

②から　$y'=2x+3$

よって，C_2 上の点 $(t,\ t^2+3t-1)$ における接線の方程式は

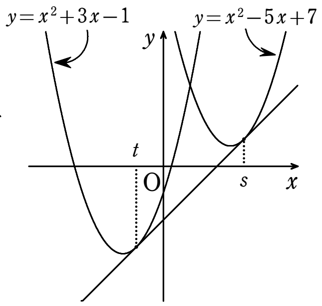
$y-(t^2+3t-1)=(2t+3)(x-t)$

すなわち　$y=(2t+3)x-t^2-1$　……④

③，④は一致するから　$\begin{cases}2s-5=2t+3\\ -s^2+7=-t^2-1\end{cases}$

よって　$s=3,\ t=-1$

③から　$\ell: y=x-2$



（イ）（ア）から，直線 ℓ と C_1 の接点の x 座標は　-1

直線 ℓ と C_2 の接点の x 座標は　3

また，C_1 と C_2 の交点は $x^2-5x+7=x^2+3x-1$ を解いて　$x=1$

ゆえに，求める面積 S は

$$S=\int_{-1}^{1}\{(x^2+3x-1)-(x-2)\}dx+\int_{1}^{3}\{(x^2-5x+7)-(x-2)\}dx$$

$$=\int_{-1}^{1}(x^2+2x+1)dx+\int_{1}^{3}(x^2-6x+9)dx=\frac{16}{3}$$

[β−3　ベクトル]　(1)，(2)各5点，(3)（ア）3点（イ）7点　計20点

(1)　$\overrightarrow{AB}=(9-7,-8-(-5),4-(-1))=(2,-3,5)$

$\overrightarrow{AC}=(a-7,1-(-5),b-(-1))=(a-7,6,b+1)$

３点A，B，Cが一直線上にあるから，k を実数として $\overrightarrow{AC}=k\overrightarrow{AB}$ と表せる。

よって，$(a-7,6,b+1)=k(2,-3,5)$

したがって，$\begin{cases}a-7=2k & \cdots ①\\ 6=-3k & \cdots ②\\ b+1=5k & \cdots ③\end{cases}$

②より　$k=-2$　①，③に代入して　$a=3,b=-11$

(2)　$\angle AOB=\theta$，$0°<\theta<180°$ とすると

$|\overrightarrow{OA}|=\sqrt{3^2+1^2}=\sqrt{10}$，$|\overrightarrow{OB}|=\sqrt{2^2+4^2}=2\sqrt5$

$\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB}=3\times2+1\times4=10$　より

$\cos\theta=\frac{\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB}}{|\overrightarrow{OA}||\overrightarrow{OB}|}=\frac{10}{\sqrt{10}\times2\sqrt5}=\frac{1}{\sqrt2}$　　よって，$\sin\theta=\frac{1}{\sqrt2}$

$\triangle OAB=\frac12|\overrightarrow{OA}||\overrightarrow{OB}|\sin\theta=\frac12\times\sqrt{10}\times2\sqrt5\times\frac{1}{\sqrt2}=5$

(3)　（ア）　$\begin{cases}\vec{p}=\vec{a}+\vec{b}\\ \vec{q}=\vec{a}-\vec{b}\end{cases}$ を解くと，$\begin{cases}\vec{a}=\frac{\vec{p}+\vec{q}}{2}\\ \vec{b}=\frac{\vec{p}-\vec{q}}{2}\end{cases}$

また，$\vec{p}\cdot\vec{q}=4\times2\times\cos60°=4$である。

$|\vec{a}|^2=\left|\frac{\vec{p}+\vec{q}}{2}\right|^2=\frac{|\vec{p}|^2+2\vec{p}\cdot\vec{q}+|\vec{q}|^2}{4}=\frac{4^2+2\times4+2^2}{4}=\frac{28}{4}=7$

$|\vec{a}|\geqq0$ より，$|\vec{a}|=\sqrt7$

$|\vec{b}|^2=\left|\frac{\vec{p}-\vec{q}}{2}\right|^2=\frac{|\vec{p}|^2-2\vec{p}\cdot\vec{q}+|\vec{q}|^2}{4}=\frac{4^2-2\times4+2^2}{4}=\frac{12}{4}=3$

$|\vec{b}|\geqq0$ より，$|\vec{b}|=\sqrt3$

（イ）（ア）から　$|\vec{p}|^2=|\vec{a}|^2+2\vec{a}\cdot\vec{b}+|\vec{b}|^2$ より，$4^2=\sqrt7^{\,2}+2\vec{a}\cdot\vec{b}+\sqrt3^{\,2}$

ゆえに　$\vec{a}\cdot\vec{b}=\frac12(16-7-3)=\frac62=3$

$|\vec{a}+t\vec{b}|^2=|\vec{a}|^2+2t\vec{a}\cdot\vec{b}+t^2|\vec{b}|^2=(\sqrt7)^2+2t\times3+t^2\times(\sqrt3)^2$

$=3t^2+6t+7=3(t+1)^2+4$

よって，$|\vec{a}+t\vec{b}|^2$ は $t=-1$ で最小値4をとる。

$|\vec{a}+t\vec{b}|\geqq0$ であるから，このとき $|\vec{a}+t\vec{b}|$ も最小となる。

したがって，$|\vec{a}+t\vec{b}|$ は $t=-1$ で最小値2をとる。

[β−4　数列]　(1)，(2)各5点，(3)（ア）3点（イ）7点　計20点

(1)　与えられた数列 $\{a_n\}$ の階差数列 $\{b_n\}$ は

2,4,8,16,…　であり

初項2，公比2の等比数列であるから

$b_n=2^n$

よって，$n\geqq2$ のとき

$a_n=a_1+\sum_{k=1}^{n-1}b_k=5+\sum_{k=1}^{n-1}2^k$

$=5+\frac{2(2^{n-1}-1)}{2-1}=5+2^n-2=2^n+3$　…①

①は $a_1=5$ なので，①は $n=1$ のときにも成り立つ。

したがって，一般項は　$a_n=2^n+3$

(2)　$S=\left(\frac12-\frac13\right)+\left(\frac13-\frac14\right)+\left(\frac14-\frac15\right)+\cdots+\left(\frac{1}{n+1}-\frac{1}{n+2}\right)$

$=\frac12-\frac{1}{n+2}=\frac{n}{2(n+2)}$

(3)

（ア）$a_{n+1}=6a_n+3^{n+1}$ の両辺を 3^{n+1} で割ると　$\frac{a_{n+1}}{3^{n+1}}=2\cdot\frac{a_n}{3^n}+1$

$b_n=\frac{a_n}{3^n}$ より　$b_{n+1}=2b_n+1$

（イ）（ア）より　$b_{n+1}=2b_n+1$　を変形すると　$b_{n+1}+1=2(b_n+1)$

ゆえに数列 $\{b_n+1\}$ は初項 $b_1+1=\frac{a_1}{3}+1=2$，公比2の等比数列である。

よって　$b_n+1=2^n$　　$b_n=2^n-1$

$a_n=b_n\cdot3^n$ であるから　$a_n=(2^n-1)\cdot3^n$

[β−5　統計的な推測]　(1)，(2)各5点，(3)（ア）3点（イ）7点　計20点

(1) 母平均mは

$$m=E(X)=1\cdot\frac{1}{20}+2\cdot\frac{3}{20}+3\cdot\frac{12}{20}+4\cdot\frac{3}{20}+5\cdot\frac{1}{20}$$
$$=\frac{1}{20}(1+6+36+12+5)=\frac{60}{20}=3$$

母標準偏差σについて

$$\mathrm{E}(X^2)=1^2\cdot\frac{1}{20}+2^2\cdot\frac{3}{20}+3^2\cdot\frac{12}{20}+4^2\cdot\frac{3}{20}+5^2\cdot\frac{1}{20}=\frac{194}{20}$$

$$\sigma^2=E(X^2)-\{E(X)\}^2=\frac{194}{20}-3^2=\frac{14}{20}=\frac{7}{10}$$

$$\sigma=\sqrt{\frac{7}{10}}=\frac{\sqrt{70}}{10}$$

(2)　標本比率は　　$R=\dfrac{225}{300}=0.75$

$n=300$ であるから

$$1.96\sqrt{\frac{R(1-R)}{n}}=1.96\sqrt{\frac{0.75\times(1-0.75)}{300}}=1.96\times0.025=0.049$$

よって，求める信頼区間は$[0.75-0.049,\ 0.75+0.049]$　すなわち　$[0.701,\ 0.799]$

(3)　Xが正規分布 $N(169.0,\ 5.5^2)$ に従うとき，$Z=\dfrac{X-169}{5.5}$ は標準正規分布 $N(0,\ 1)$ に従う。

（ア）　$X=180$ のとき，$Z=\dfrac{180-169}{5.5}=2$　であるから

$$P(X\geqq180)=P(Z\geqq2)=P(Z\geqq0)-P(0\leqq Z\leqq2)$$
$$=0.5-p(2)=0.5-0.4772=0.0228$$

（イ）　$X=168$ のとき，$Z=\dfrac{168-169}{5.5}\fallingdotseq-0.18$ であるから

$$P(X\geqq168)=P(Z\geqq-0.18)=P(Z\leqq0.18)$$
$$=P(Z\leqq0)+P(0\leqq Z\leqq0.18)$$