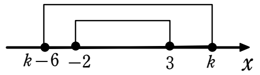
数学学力テストSⅠβ　詳解

共通問題　　各4点

(1) $\dfrac{\sqrt{2}}{\sqrt{6}+\sqrt{3}}=\dfrac{\sqrt{2}(\sqrt{6}-\sqrt{3})}{(\sqrt{6}+\sqrt{3})(\sqrt{6}-\sqrt{3})}=\dfrac{\sqrt{12}-\sqrt{6}}{6-3}=\dfrac{2\sqrt{3}-\sqrt{6}}{3}$

(2) $x^2+y^2-2xy-z^2=(x^2-2xy+y^2)-z^2=(x-y)^2-z^2=(x-y+z)(x-y-z)$

(3) $P=\{x\mid -2\leqq x\leqq 3\}$, $Q=\{x\mid k-6\leqq x\leqq k\}$ とする。
与えられた命題が真であるとき，$P\subset Q$ であるから　$k-6\leqq -2$　かつ　$k\geqq 3$



すなわち　$k\leqq 4$　かつ　$k\geqq 3$
よって　$3\leqq k\leqq 4$

(4) ③

(5) x 軸と2点 $(-3,0)$, $(1,0)$ で交わるので，求める2次関数は $y=a(x+3)(x-1)$ と表される。グラフが点 $(2,5)$ を通るので　$5=a(2+3)(2-1)$
これを解いて　$a=1$
よって　$y=(x+3)(x-1)$　（または　$y=x^2+2x-3$）

(6) $x^2-2\sqrt{5}x+5>0$　より　$(x-\sqrt{5})^2>0$
よって，解は $x=\sqrt{5}$ 以外のすべての実数

(7) $2\cos\theta+\sqrt{2}=0$　より　$\cos\theta=-\dfrac{\sqrt{2}}{2}$
$0°\leqq\theta\leqq 180°$　より　$\theta=135°$

(8) $S=\dfrac{1}{2}\mathrm{AB}\cdot\mathrm{BC}\cdot\sin\angle\mathrm{ABC}$より
$S=\dfrac{1}{2}\cdot 5\cdot 2\sqrt{2}\cdot\sin 60°=\dfrac{1}{2}\cdot 5\cdot 2\sqrt{2}\cdot\dfrac{\sqrt{3}}{2}=\dfrac{5\sqrt{6}}{2}$

(9) 平均 $\overline{x}$ は　$\overline{x}=\dfrac{2+2+3+5+9+9}{6}=5$
よって，分散 s^2は
$s^2=\dfrac{1}{6}\{(2-5)^2+(2-5)^2+(3-5)^2+(5-5)^2+(9-5)^2+(9-5)^2\}=9$

(10) 9個の頂点はどの3点も一直線上にないから，3個の点を1組決めると三角形が1個作れる。
よって，作れる三角形の個数は　${}_9\mathrm{C}_3=\dfrac{9\cdot 8\cdot 7}{3\cdot 2\cdot 1}=84$（個）

(11) Aの袋の中の赤玉が変わらないのは，次のどちらかの場合である。
[1] ともに白玉を取り出す場合
このときの確率は　$\dfrac{3}{7}\times\dfrac{4}{8}=\dfrac{12}{56}$
[2] ともに赤玉を取り出す場合
このときの確率は　$\dfrac{4}{7}\times\dfrac{5}{8}=\dfrac{20}{56}$
[1]，[2] は互いに排反だから，求める確率は
$\dfrac{12}{56}+\dfrac{20}{56}=\dfrac{32}{56}=\dfrac{4}{7}$

(12) 接弦定理により　$\angle\mathrm{ACB}=50°$
$\angle\mathrm{ACO}=50°-32°=18°$
$\triangle\mathrm{AOC}$ は二等辺三角形より　$\angle x=180°-18°\times 2=144°$

(13) $\triangle\mathrm{ABC}$ の頂点Aにおける外角の二等分線と辺BCの延長との交点がDであるから
$\mathrm{AB}:\mathrm{AC}=\mathrm{BD}:\mathrm{DC}$
$21:15=(8+x):x$　$15(8+x)=21x$　$120+15x=21x$　$6x=120$
よって　$x=20$

(14) 14を2で割り，商を2で割る割り算を繰り返すと右のように なる。余りを逆順に並べて　$1110_{(2)}$

$$\begin{array}{r|rl} & & \text{余り}\\ 2 & 14 & \\ 2 & 7 & \cdots 0\\ 2 & 3 & \cdots 1\\ & 1 & \cdots 1\end{array}$$

(15) $66=2\cdot 3\cdot 11$　　$110=2\cdot 5\cdot 11$　　$2024=2^3\cdot 11\cdot 23$
最大公約数は　$2\cdot 11=22$　最小公倍数は　$2^3\cdot 3\cdot 5\cdot 11\cdot 23=30360$

［β−1］場合の数　　(1)(2) 各5点, (3) 10点

(1) 「2個が同じ色である」という事象は，2つの事象 A「2個とも赤玉である」と B「2個とも白玉である」の和事象 $A\cup B$ である。
$P(A)=\dfrac{{}_5\mathrm{C}_2}{{}_8\mathrm{C}_2}=\dfrac{10}{28}$，　$P(B)=\dfrac{{}_3\mathrm{C}_2}{{}_8\mathrm{C}_2}=\dfrac{3}{28}$
A，B は互いに排反であるから，確率の加法定理により，求める確率は
$P(A\cup B)=P(A)+P(B)=\dfrac{10}{28}+\dfrac{3}{28}=\dfrac{13}{28}$

(2) 隣り合う大人3人をまとめて1組と考えて，この1組と子ども3人が円形のテーブルの周りに並ぶ方法は $(4-1)!$ 通り
そのおのおのに対して，大人3人の並び方は $3!$ 通り
よって，求める並び方の総数は　$(4-1)!\times 3!=3!\times 3!=6\times 6=36$（通り）

(3) 空室ができてもよいとすると，A，B，C 3部屋に5人が入る方法は
$3^5=243$通り　△3
このうち，空室が1部屋できる場合は，空室の選び方が ${}_3\mathrm{C}_1$ 通りあり，それぞれに対して，残りの2部屋に5人が入る方法が 2^5-2 通りあるから
${}_3\mathrm{C}_1\cdot(2^5-2)=90$通り　△6
空室が2部屋できる場合は ${}_3\mathrm{C}_2=3$ 通り
よって，求める方法の総数は
$3^5-{}_3\mathrm{C}_1\cdot(2^5-2)-{}_3\mathrm{C}_2=243-90-3=150$（通り）　⑩

［β−2］数学と人間の活動　　(1)(2) 各5点, (3) 10点

(1) 最大の自然数より，$76\boxed{9}8\square$ となるような自然数を考えると，各位の数の和が
$(7+6+9+8+)+\square=30+\square$であり，これが9の倍数となるような $\square$ は6のみである。
よって求める自然数は，76986

(2) $x(y-2)+3(y-2)+6-1=(x+3)(y-2)+5$ と変形できるから
$(x+3)(y-2)=-5$
x，y は整数であるから，$x+3$，$y-2$ も整数である。
よって　$(x+3,\ y-2)=(1,\ -5),(-1,\ 5),(5,\ -1),(-5,\ 1)$
ゆえに　$(x,\ y)=(-2,\ -3),(-4,\ 7),(2,\ 1),(-8,\ 3)$

(3) $13x+8y=7$　……①
$x=3$，$y=-4$ は，① の整数解の1つである。△3
よって　$13\cdot 3+8\cdot(-4)=7$　……②
①−② から　$13(x-3)+8(y+4)=0$　すなわち　$13(x-3)=-8(y+4)$　……③
13と8は互いに素であるから，$x-3$ は8の倍数である。
よって，k を整数として，$x-3=8k$ と表される。△6
これを ③ に代入すると　$13\cdot 8k=-8(y+4)$　すなわち　$y+4=-13k$
したがって，求める整数解は　$x=8k+3$，$y=-13k-4$　（kは整数）　⑩
※波線部がない場合は，加点しない。

［$\beta-3$］平面図形　(1)(2) 各5点, (3) 10点

(1) △ABC にチェバの定理を用いると　$\dfrac{\mathrm{BP}}{\mathrm{PC}}\cdot\dfrac{\mathrm{CQ}}{\mathrm{QA}}\cdot\dfrac{\mathrm{AR}}{\mathrm{RB}}=1$

すなわち　$\dfrac{\mathrm{BP}}{\mathrm{PC}}\cdot\dfrac{2}{5}\cdot\dfrac{3}{1}=1$

$\dfrac{\mathrm{BP}}{\mathrm{PC}}=\dfrac{5}{6}$ より　$\underline{\underline{\mathrm{BP}:\mathrm{PC}=5:6}}$

(2) 円 O′ の半径を r とし，点 O から O′C に垂線 OH を下ろす。

四角形 CHOB は長方形であるから

$\mathrm{BC}=\mathrm{OH}=10$，$\mathrm{HC}=\mathrm{OB}=\mathrm{OA}=4$

$\mathrm{O'H}=\mathrm{O'C}-\mathrm{HC}=r-4$

$\mathrm{OO'}=\mathrm{OA}+\mathrm{AO'}=r+4$

直角三角形 OO′H において，三平方の定理により

$\mathrm{OO'}^2=\mathrm{O'H}^2+\mathrm{OH}^2$

$(r+4)^2=(r-4)^2+10^2$

$16r=100$

$r=\dfrac{25}{4}$　　したがって　$\underline{\underline{半径は\ \dfrac{25}{4}}}$

(3) 四角形 ABCD は円に内接しているから　$\angle\mathrm{CDP}=\angle\mathrm{ABC}=90^\circ$

よって，△CDP は直角三角形であるから，三平方の定理により

$\mathrm{CD}^2+\mathrm{DP}^2=\mathrm{CP}^2$

ゆえに　$\mathrm{CD}^2+(\sqrt{6})^2=3^2$

CD＞0 であるから　$\mathrm{CD}=\sqrt{3}$　3

$\overset{\frown}{\mathrm{AD}}=2\overset{\frown}{\mathrm{CD}}$ から　$\angle\mathrm{ACD}=2\angle\mathrm{CAD}$

また，$\angle\mathrm{ACD}+\angle\mathrm{CAD}=90^\circ$ であるから　$\angle\mathrm{ACD}=60^\circ$，$\angle\mathrm{CAD}=30^\circ$

ゆえに，△ACD は $\mathrm{CD}:\mathrm{AC}:\mathrm{AD}=1:2:\sqrt{3}$ の直角三角形であるから　$\mathrm{AD}=\sqrt{3}\,\mathrm{CD}$

したがって　$\mathrm{AD}=3$　6

さらに，方べきの定理により　$\mathrm{PD}\cdot\mathrm{PA}=\mathrm{PC}\cdot\mathrm{PB}$

よって　$\sqrt{6}(3+\sqrt{6})=3(\mathrm{BC}+3)$

すなわち　$3\sqrt{6}+6=3\mathrm{BC}+9$

ゆえに　$\mathrm{BC}=\underline{\underline{\sqrt{6}-1}}$　10

［$\beta-4$］2次関数　(1)(2) 各5点, (3) 10点

(1) $y=-x^2-6x-8=-(x^2+6x)-8=-(x+3)^2+1$

よって，頂点 は $(-3\,,1)$

(2) 求める放物線の方程式は

$y-5=2\{x-(-2)\}^2+4\{x-(-2)\}$

ゆえに，　$y-5=2(x+2)^2+4(x+2)$

よって，　$\underline{\underline{y=2x^2+12x+21}}$

(3) 与えられた関数の式を変形すると

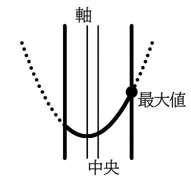
$y=2\left(x-\dfrac{1}{2}a\right)^2-\dfrac{1}{2}a^2-a+1$　$(0\leqq x\leqq 2)$　3

$y=2x^2-2ax-a+1$ のグラフは下に凸の放物線で，軸は直線 $x=\dfrac{1}{2}a$ である。

また，区間 $0\leqq x\leqq 2$ の中央の値は 1 である。

[1] $a<2$ のとき

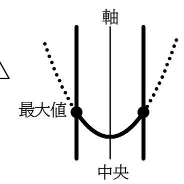
右のグラフから，$x=2$ で最大値をとる。



[2] $a=2$ のとき

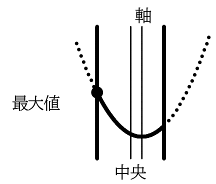
右のグラフから，$x=0\,,2$ で最大値をとる。

いずれか2つで　6



[3] $a>2$ のとき

右のグラフから，$x=0$ で最大値をとる。



よって

$a<2$ のとき，$x=2$ で最大値 $9-5a$ をとる。

$a=2$ のとき，$x=0$，2 で最大値 -1 をとる。

$a>2$ のとき，$x=0$ で最大値 $-a+1$ をとる。　10

［$\beta-5$］図形と計量　(1)(2) 各5点, (3) 10点

(1) $\cos\theta=-\sqrt{1-\sin^2\theta}=\underline{\underline{-\dfrac{\sqrt{21}}{5}}}$

$\tan\theta=\dfrac{\sin\theta}{\cos\theta}=\underline{\underline{-\dfrac{2}{\sqrt{21}}}}$

(2) $\tan\theta+\dfrac{1}{\tan\theta}=\dfrac{\sin\theta}{\cos\theta}+\dfrac{\cos\theta}{\sin\theta}=\dfrac{\sin^2\theta+\cos^2\theta}{\sin\theta\cos\theta}=\dfrac{1}{\sin\theta\cos\theta}=\underline{\underline{6}}$

(3) A から BC に下ろした垂線の足を H とすると，

$\mathrm{AH}=\dfrac{\sqrt{3}-1}{\sqrt{2}}$

$\mathrm{BH}=\sqrt{6}-\dfrac{\sqrt{3}-1}{\sqrt{2}}=\dfrac{\sqrt{3}+1}{\sqrt{2}}$　3

よって　$\mathrm{AB}=\sqrt{\left(\dfrac{\sqrt{3}+1}{\sqrt{2}}\right)^2+\left(\dfrac{\sqrt{3}-1}{\sqrt{2}}\right)^2}=2$　6

したがって　$\cos 15^\circ=\dfrac{\mathrm{BH}}{\mathrm{AB}}=\dfrac{\sqrt{3}+1}{2\sqrt{2}}=\underline{\dfrac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}}$　10