SⅡβ共通問題　各4点　15題　計60点

(1) $(x^3)^2-(y^3)^2=(x^3+y^3)(x^3-y^3)$

$=(x+y)(x-y)(x^2+xy+y^2)(x^2-xy+y^2)$

(2) $a>0$，$\dfrac{25}{a}>0$　相加平均と相乗平均の関係より　$a+\dfrac{25}{a}\geqq 2\sqrt{a\cdot\dfrac{25}{a}}=10$

等号成立は　$a=\dfrac{25}{a}$　つまり　$a^2=25$　$a>0$ から　$a=5$　よって $a=5$ のとき，最小値 10

(3) 等式の右辺を x について整理すると

$x^3-1=ax^3+(-6a+b)x^2+(11a-3b+c)x+(-6a+2b-c+d)$

この等式が x についての恒等式であるので

$a=1$，$-6a+b=0$，$11a-3b+c=0$，$-6a+2b-c+d=-1$

これを解くと

$a=1$，$b=6$，$c=7$，$d=0$

(4) 解と係数の関係より　$\alpha+\beta=-\dfrac{-2}{3}=\dfrac{2}{3}$，$\alpha\beta=\dfrac{5}{3}$

$\alpha^2+\beta^2=(\alpha+\beta)^2-2\alpha\beta=\left(\dfrac{2}{3}\right)^2-2\cdot\dfrac{5}{3}=-\dfrac{26}{9}$

(5) $P(x)$ を $(x-1)(x+3)$ で割ったときの商を $Q(x)$，余りを $ax+b$ とおくと，

$P(x)=(x-1)(x+3)\cdot Q(x)+ax+b$ …①

と表せる。

また，剰余の定理より　$P(1)=3$，$P(-3)=-5$　…②

①，②より　$\begin{cases}3=a+b\\-5=-3a+b\end{cases}$

これを解くと　$a=2$，$b=1$　　したがって，求める余りは $2x+1$

(6) $P(x)=x^3-3x^2+4x-4$ とすると

$P(2)=0$

$P(x)$ は $x-2$ で割り切れるから，

$P(x)$ を因数分解する

$P(x)=(x-2)(x^2-x+2)$

$P(x)=0$ から

$x-2=0$ または $x^2-x+2=0$

したがって　$x=2$，$\dfrac{1\pm\sqrt{7}\,i}{2}$

$$\begin{array}{r}x^2-x+2\\ x-2\,\big)\,\overline{x^3-3x^2+4x-4}\\ \underline{x^3-2x^2}\\ -x^2+4x\\ \underline{-x^2+2x}\\ 2x-4\\ \underline{2x-4}\\ 0\end{array}$$

(7) 線分 AB を 1：2 に内分する点 P の x 座標は $\dfrac{2\cdot1+1\cdot7}{1+2}=\dfrac{9}{3}=3$

y 座標は $\dfrac{2\cdot4+1\cdot(-2)}{1+2}=\dfrac{6}{3}=2$　よって P の座標は (3 , 2)

(8) 直線 AB の傾きは $\dfrac{8-4}{4-2}=2$ なので

線分 AB の垂直二等分線の傾きを m とすると　$2\cdot m=-1$　よって　$m=-\dfrac{1}{2}$

また，線分 AB の中点の x 座標は $\dfrac{2+4}{2}=3$，y 座標は $\dfrac{4+8}{2}=6$ から 中点の座標は (3 , 6)

線分 AB の垂直二等分線はこの点を通るので方程式は

$y-6=-\dfrac{1}{2}(x-3)$　　$y=-\dfrac{1}{2}x+\dfrac{15}{2}$

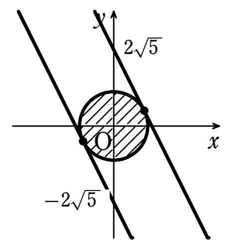
(9) 与えられた不等式の表す領域を A とする。

$2x+y=k$ とおくと，これは傾きが -2，y 切片が k である直線を表す。

この直線が領域 A と共有点をもつような k の値の最大値と最小値を求めればよい。

$x^2+y^2=4$ と $2x+y=k$ から y を消去して整理すると

$5x^2-4kx+k^2-4=0$　…　①



方程式 ① の判別式を D とすると

$\dfrac{D}{4}=(-2k)^2-5\cdot(k^2-4)=-k^2+20=-(k+2\sqrt{5})(k-2\sqrt{5})$

方程式 ① が実数解を持つから　$D\geqq0$

$-(k+2\sqrt{5})(k-2\sqrt{5})\geqq0$

$(k+2\sqrt{5})(k-2\sqrt{5})\leqq0$

$-2\sqrt{5}\leqq k\leqq 2\sqrt{5}$

したがって，$2x+y$ は　最大値 $2\sqrt{5}$，最小値 $-2\sqrt{5}$ をとる。

(10) A$=-\pi$，B$=-1$，C$=\dfrac{3}{2}\pi$

(11) $\dfrac{\sin\theta}{1+\cos\theta}+\dfrac{\sin\theta}{1-\cos\theta}=\dfrac{\sin\theta(1-\cos\theta)+\sin\theta(1+\cos\theta)}{(1+\cos\theta)(1-\cos\theta)}=\dfrac{2\sin\theta}{1-\cos^2\theta}=\dfrac{2\sin\theta}{\sin^2\theta}=\dfrac{2}{\sin\theta}$

$\pi<\theta<2\pi$ から　$\sin\theta<0$

よって　$\sin\theta=-\sqrt{1-\cos^2\theta}=-\sqrt{1-\left(\dfrac{\sqrt{21}}{5}\right)^2}=-\sqrt{1-\dfrac{21}{25}}=-\sqrt{\dfrac{4}{25}}=-\dfrac{2}{5}$

したがって　$\dfrac{2}{\sin\theta}=2\div\left(-\dfrac{2}{5}\right)=-5$

(12) (与式)$=2^{\frac{1}{3}}\times2^{\frac{1}{6}}\div2^{\frac{1}{2}}=2^{\frac{1}{3}+\frac{1}{6}-\frac{1}{2}}=2^0=1$

(13) 真数は正であるから　$x>0$ かつ $x-8>0$ より　$x>8$　……①

与えられた不等式は　$\log_3 x+\log_3(x-8)<\log_3 9$

$\log_3 x(x-8)<\log_3 9$

底 3 は 1 より大きいから　$x(x-8)<9$

よって　$x^2-8x-9<0$

ゆえに　$-1<x<9$　……②

①,②より，解は　$8<x<9$

(14) $y'=3x^2+6x-9=3(x+3)(x-1)$

$y'=0$ とすると　$x=-3, 1$

$-1\leqq x\leqq 2$ における y の増減表は, 次のようになる。

x	-1	$\cdots$	1	$\cdots$	2
y'		$-$	0	$+$	
y	11	↘	-5	↗	2

よって $x=-1$ で最大値11,

$x=1$ で最小値-5 をとる。

(15) (与式)$=\displaystyle\int_{-2}^{2}(x^3+x^2-3x-3)dx=2\int_0^2(x^2-3)dx=2\left[\dfrac{x^3}{3}-3x\right]_0^2=2\left\{\left(\dfrac{8}{3}-6\right)-0\right\}=-\dfrac{20}{3}$

［β-1　三角関数］(1)，(2)各5点，(3)（ア）3点（イ）7点　計20点

(1) $\sin\left(-\dfrac{1000}{3}\pi\right)=\sin\left\{-\left(2\pi\times166+\dfrac{4}{3}\pi\right)\right\}$

$=\sin\left(-\dfrac{4}{3}\pi\right)$

$=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$

(2) $2\cos^2\theta-\sin\theta-1=0$

$2(1-\sin^2\theta)-\sin\theta-1=0$

$2\sin^2\theta+\sin\theta-1=0$

$(\sin\theta+1)(2\sin\theta-1)=0$

$\sin\theta=-1,\ \dfrac{1}{2}$

$0\leqq\theta<2\pi$ より，$\theta=\dfrac{\pi}{6},\ \dfrac{5}{6}\pi,\ \dfrac{3}{2}\pi$

(3)(ア) $y=2\sin x-(1-2\sin^2 x)=2\sin^2 x+2\sin x-1$

よって，$y=2t^2+2t-1$

（イ） $y=2\left(t+\dfrac{1}{2}\right)^2-\dfrac{3}{2}$　2

$-\dfrac{\pi}{2}\leqq x\leqq\dfrac{\pi}{2}$ のとき，$-1\leqq\sin x\leqq1$ より，$-1\leqq t\leqq1$

y は，$t=1$ のとき最大値 3 をとり，$t=-\dfrac{1}{2}$ のとき最小値 $-\dfrac{3}{2}$ をとる。　5

$t=1$ のとき，$\sin x=1$　$-\dfrac{\pi}{2}\leqq x\leqq\dfrac{\pi}{2}$ より，$x=\dfrac{\pi}{2}$

$t=-\dfrac{1}{2}$ のとき，$\sin x=-\dfrac{1}{2}$　$-\dfrac{\pi}{2}\leqq x\leqq\dfrac{\pi}{2}$ より，$x=-\dfrac{\pi}{6}$

以上により，

y は，$x=\dfrac{\pi}{2}$ のとき最大値 3 をとり，$x=-\dfrac{\pi}{6}$ のとき最小値 $-\dfrac{3}{2}$ をとる。7

［β－2　微分法と積分法］(1)，(2)各5点，(3)（ア）3点（イ）7点　計20点

(1)　$\dfrac{dS}{dr}=2\pi r$

(2)　求める2次関数を $f(x)=ax^2+bx+c\ (a\neq 0)$ とすると，$f'(x)=2ax+b$

$f(1)=2$ から　　$a+b+c=2$

$f'(1)=1$ から　　$2a+b=1$

$f'(0)=-5$ から　　$b=-5$

これを解いて，$a=3,\ b=-5,\ c=4$

したがって，$f(x)=3x^2-5x+4$

(3)(ア)　$f(x)=x^2-2x+4$ とすると，$f'(x)=2x-2$

曲線 $y=f(x)$ 上の点 $(a,\ f(a))$ における接線の方程式は

$$y-(a^2-2a+4)=(2a-2)(x-a)$$

すなわち，$y=(2a-2)x-a^2+4$　……①

この直線が原点Oを通るから

$$0=-a^2+4 \iff a=\pm 2$$

求める接線の方程式は，①に代入して

$$y=2x,\quad y=-6x$$

（イ）（ア）よりグラフは下のようになるので，求める面積は

$$\int_{-2}^{0}\{(x^2-2x+4)-(-6x)\}dx+\int_{0}^{2}\{(x^2-2x+4)-2x\}dx$$ △2

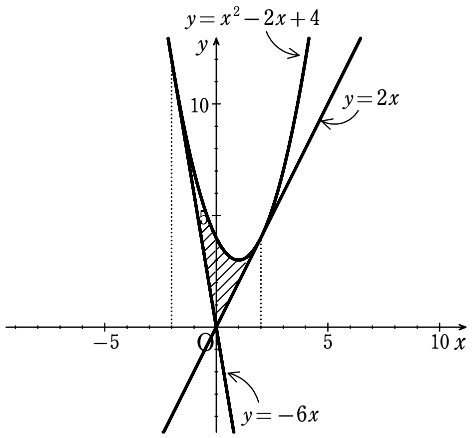
$$=\int_{-2}^{0}(x^2+4x+4)dx+\int_{0}^{2}(x^2-4x+4)dx$$

$$=\left[\frac{x^3}{3}+2x^2+4x\right]_{-2}^{0}+\left[\frac{x^3}{3}-2x^2+4x\right]_{0}^{2}$$ △5

$$=\left(\frac{1}{3}(0-(-8))+2(0-4)+4(0-(-2))\right)+\left(\frac{1}{3}(8-0)-2(4-0)+4(2-0)\right)$$

$$=\frac{8}{3}+\frac{8}{3}$$

$$=\frac{16}{3}$$ ⑦



［β－3　ベクトル］(1)，(2)各5点，(3)（ア）3点（イ）7点　計20点

(1)　$\vec{e}=(x,\ y)$ とする。

$\vec{a}\perp\vec{e}$ であるから　$\vec{a}\cdot\vec{e}=0$　すなわち　$-\sqrt{7}x+3y=0$

よって　　$y=\dfrac{\sqrt{7}}{3}x$　……①

$|\vec{e}|^2=1^2$ であるから　　$x^2+y^2=1^2$　……②

①を②に代入すると　　$x^2+\left(\dfrac{\sqrt{7}}{3}x\right)^2=1$

整理すると　　$\dfrac{16}{9}x^2=1$　すなわち　$x=\pm\dfrac{3}{4}$

①に代入して　$x=\dfrac{3}{4}$　のとき　$y=\dfrac{\sqrt{7}}{4}$

$x=-\dfrac{3}{4}$　のとき　$y=-\dfrac{\sqrt{7}}{4}$

以上より　　$\vec{e}=\left(\dfrac{3}{4},\ \dfrac{\sqrt{7}}{4}\right),\ \left(-\dfrac{3}{4},\ -\dfrac{\sqrt{7}}{4}\right)$

(2) 3点A，B，Cが一直線上にあるとき，$\overrightarrow{AB}=k\overrightarrow{AC}$ となる実数 k がある。

$\overrightarrow{AB}=k\overrightarrow{AC}$ とすると　$(x-3,\ -4)=k(3,\ 2)$

よって　　$x-3=3k$　……①，　$-4=2k$　……②

①，②を解いて　　$k=-2$，$x=-3$

(3)(ア) $\overrightarrow{OQ}=\dfrac{3}{4}\overrightarrow{OA}=\dfrac{3}{4}\vec{a}$

$$\overrightarrow{OR}=\frac{\overrightarrow{OB}+2\overrightarrow{OC}}{2+1}=\frac{1}{3}\vec{b}+\frac{2}{3}\vec{c}$$

$$\overrightarrow{OM}=\frac{\overrightarrow{OQ}+\overrightarrow{OR}}{2}=\frac{1}{2}\left(\frac{3}{4}\vec{a}+\frac{1}{3}\vec{b}+\frac{2}{3}\vec{c}\right)=\frac{3}{8}\vec{a}+\frac{1}{6}\vec{b}+\frac{1}{3}\vec{c}$$

（イ）Pは直線OM上にあるから，$\overrightarrow{OP}=k\overrightarrow{OM}$ となる実数 k がある。

よって　　$\overrightarrow{OP}=\dfrac{3k}{8}\vec{a}+\dfrac{k}{6}\vec{b}+\dfrac{k}{3}\vec{c}$　……①　△2

また，Pは平面ABC上にあるから，①において

$\dfrac{3k}{8}+\dfrac{k}{6}+\dfrac{k}{3}=1$　　すなわち　　$k=\dfrac{8}{7}$　△5

したがって　　$\overrightarrow{OP}=\dfrac{3}{7}\vec{a}+\dfrac{4}{21}\vec{b}+\dfrac{8}{21}\vec{c}$　⑦

［β－4　数列］(1)，(2)各5点，(3)（ア）3点（イ）7点　計20点

(1)　等比数列 $\{a_n\}$ の初項を $a\ (a\neq 0)$，公比を $r\ (r\neq 0)$ とすると第 n 項は $a_n=ar^{n-1}$ と書ける

第3項が12なので　$12=ar^2$　…　①　　　第5項が48なので　$48=ar^4$　…　②

②÷①より　　$\dfrac{48}{12}=\dfrac{ar^4}{ar^2}$

$4=r^2$

$r=\pm 2$

$r=-2$ のとき　$4a=12$ から　$a=3$　これより　$a_n=3\cdot(-2)^{n-1}$

$r=2$ のとき　$4a=12$ から　$a=3$　これより　$a_n=3\cdot 2^{n-1}$

よって求める数列の一般項は，$a_n=3\cdot(-2)^{n-1}$，$a_n=3\cdot 2^{n-1}$

(2)　$\displaystyle\sum_{k=1}^{n}k(3k+1)=\sum_{k=1}^{n}(3k^2+k)$

$\displaystyle=3\sum_{k=1}^{n}k^2+\sum_{k=1}^{n}k$

$=3\times\dfrac{1}{6}n(n+1)(2n+1)+\dfrac{1}{2}n(n+1)$

$=\dfrac{1}{2}n(n+1)\cdot 2(n+1)$

$=n(n+1)^2$

＜公式の確認＞

①　$\displaystyle\sum_{k=1}^{n}c=cn$　（c は定数）

②　$\displaystyle\sum_{k=1}^{n}k=\frac{1}{2}n(n+1)$

③　$\displaystyle\sum_{k=1}^{n}k^2=\frac{1}{6}n(n+1)(2n+1)$

(3)（ア）　与式から　$S_{n+1}=\dfrac{3}{2}a_{n+1}+4(n+1)-7$

$S_{n+1}=S_n+a_{n+1}$ を利用すると

$\dfrac{3}{2}a_{n+1}+4(n+1)-7=\dfrac{3}{2}a_n+4n-7+a_{n+1}$

$\dfrac{3}{2}a_{n+1}-a_{n+1}+4n+4=\dfrac{3}{2}a_n+4n$

$\dfrac{1}{2}a_{n+1}=\dfrac{3}{2}a_n-4$

両辺2倍して　　$a_{n+1}=3a_n-8\ (n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$

（イ）　$a_{n+1}=3a_n-8$ を変形すると　　$a_{n+1}-4=3(a_n-4)$　…　①　△2

与式から　　$S_1=\dfrac{3}{2}a_1+4\times 1-7$

$S_1=a_1$ から　$a_1=\dfrac{3}{2}a_1-3$　よって　$a_1=6$　△5

①から　数列 $\{a_n-4\}$ は　初項 $a_1-4=6-4=2$，公比3の等比数列である

したがって　$a_n-4=2\cdot 3^{n-1}$　よって，　$a_n=2\cdot 3^{n-1}+4$　⑦