S II β

令和5年4月実施

神奈川県高等学校教科研究会数学部会編

数　学　学　力　テ　ス　ト

注意事項

1．開始の合図があるまで，この問題冊子を開いてはいけません。
2．解答用紙はこの冊子にはさんであります。
3．計算はあいているところを使い，答えはすべて解答用紙の決められた欄に書き入れなさい。
4．問題には選択問題と，全員必答の共通問題があります。
5．選択問題については，［$\beta-1$］から［$\beta-4$］までの4群から，学校で指示された2群を解答しなさい。

解答上の注意事項

答えに根号が含まれるときは，根号の中は最も小さい自然数にしなさい。
答えが分数になるとき，約分できる場合は約分しなさい。

$\boxed{\text{SⅡ}\beta\text{共通問題}}$　各４点　15題　計60点

次の各問いに答えよ。

(1)　x^6-y^6 を因数分解せよ。

(2)　$a>0$ のとき，$a+\dfrac{25}{a}$ の最小値を求めよ。

(3)　等式 $x^3-1=a(x-1)(x-2)(x-3)+b(x-1)(x-2)+c(x-1)+d$ が x についての恒等式となるように，定数 a，b，c，d の値を定めよ。

(4)　２次方程式 $3x^2-2x+5=0$ の２つの解を α，β とするとき，$\alpha^2+\beta^2$ の値を求めよ。

(5)　整式 $P(x)$ を $x-1$ で割った余りが３，$x+3$ で割った余りが -5 である。$P(x)$ を $(x-1)(x+3)$ で割った余りを求めよ。

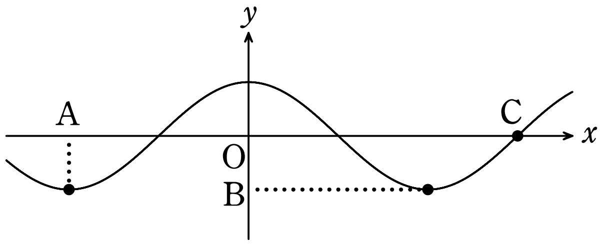
(6)　３次方程式 $x^3-3x^2+4x-4=0$ を解け。

(7)　２点 A$(1,4)$，B$(7,-2)$ を結ぶ線分 AB を，1：2 に内分する点 P の座標を求めよ。

(8)　２点 A$(2,4)$，B$(4,8)$ を結ぶ線分 AB の垂直二等分線の方程式を求めよ。

(9)　不等式 $x^2+y^2\leqq 4$ を満たす x，　y に対して，　$2x+y$ の最大値，最小値を求めよ。

(10)　下の図は $y=\cos x$ のグラフである。目盛りA～Cの値を求めよ。



(11)　$\pi<\theta<2\pi$，　$\cos\theta=\dfrac{\sqrt{21}}{5}$ のとき，　$\dfrac{\sin\theta}{1+\cos\theta}+\dfrac{\sin\theta}{1-\cos\theta}$ の値を求めよ。

(12)　$\sqrt[3]{2}\times\sqrt[6]{2}\div\sqrt{2}$ を計算せよ。

(13)　不等式 $\log_3 x+\log_3(x-8)<2$ を解け。

(14)　関数 $y=x^3+3x^2-9x\ \ (-1\leqq x\leqq 2)$ における最大値，最小値を求めよ。

(15)　定積分 $\displaystyle\int_{-2}^{2}(x+1)(x^2-3)\,dx$ を求めよ。

$\boxed{\text{SⅡ}\beta\text{選択問題}}$　[β−1]から[β−4]の中から2群を解答すること。各群20点

[β−1　三角関数]　⑴，⑵各5点，⑶(ア)3点（イ）7点

⑴　$\sin\left(-\dfrac{1000}{3}\pi\right)$ の値を求めよ。

⑵　$0 \leqq \theta < 2\pi$ のとき，方程式 $2\cos^2\theta - \sin\theta - 1 = 0$ を解け。

⑶　関数 $y = 2\sin x - \cos 2x$ について，次の問いに答えよ。

（ア）$t = \sin x$ とおくとき， y を t の式で表せ。

（イ）$-\dfrac{\pi}{2} \leqq x \leqq \dfrac{\pi}{2}$ のとき， y の最大値，最小値と，そのときの x の値を求めよ。

[β−2　微分法と積分法]　⑴，⑵各5点，⑶(ア)3点（イ）7点

⑴　$S = \pi r^2$ を r で微分せよ。

⑵　$f(1) = 2$ ，$f'(1) = 1$ ，$f'(0) = -5$ を満たす2次関数 $f(x)$ を求めよ。

⑶　次の問いに答えよ。

(ア)　曲線 $y = x^2 - 2x + 4$ のグラフに原点Oから引いた2つの接線の方程式を求めよ。

(イ)　(ア)で求めた2接線と曲線 $y = x^2 - 2x + 4$ によって囲まれた図形の面積を求めよ。

［$\beta-3$　ベクトル］(1)，(2)各5点，(3)(ア)3点（イ）7点

(1)　$\vec{a}=(-\sqrt{7},\ 3)$ に垂直な単位ベクトル $\vec{e}$ を求めよ。

(2)　$\overrightarrow{AB}=(x-3,\ -4)$，$\overrightarrow{AC}=(3,\ 2)$ とする。３点 A，B，C が一直線上にあるように実数 x の値を定めよ。

(3)　四面体OABCにおいて，辺OA を 3：1 に内分する点をQ，辺BC を 2：1 に内分する点をR，線分QR の中点をM とし，直線OM と平面ABC の交点をPとする。$\overrightarrow{OA}=\vec{a}$，$\overrightarrow{OB}=\vec{b}$，$\overrightarrow{OC}=\vec{c}$ とするとき，次の問いに答えよ。

（ア）$\overrightarrow{OM}$ を $\vec{a}$，$\vec{b}$，$\vec{c}$ を用いて表せ。

（イ）$\overrightarrow{OP}$ を $\vec{a}$，$\vec{b}$，$\vec{c}$ を用いて表せ。

［$\beta-4$　数列］(1)，(2)各5点，(3)(ア)3点（イ）7点

(1)　第３項が 12，第５項が 48 である等比数列 $\{a_n\}$ の一般項を求めよ。

(2)　$\displaystyle\sum_{k=1}^{n} k(3k+1)$ を求めよ。

(3)　数列 $\{a_n\}$ の初項から第 n 項までの和 S_n が，

$S_n=\dfrac{3}{2}a_n+4n-7\ (n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$ を満たすとする。このとき，次の問いに答えよ。

（ア）$S_{n+1}=S_n+a_{n+1}$ であることを利用して，a_{n+1} を a_n を用いて表せ 。

（イ）数列 $\{a_n\}$ の一般項を求めよ。