数学学力テスト　SⅡβ　令和４年４月実施　詳解

SⅡβ共通問題　各4点　15題　計60点

(1)　展開式の一般項は　${}_5C_r(2x)^{5-r}(3y)^r={}_5C_r2^{5-r}3^rx^{5-r}y^r$

x^3y^2 の項は $r=2$ のときで，その係数は

$${}_5C_2\,2^3\,3^2=10\times8\times9=\underline{\underline{720}}$$

(2)　条件から

$6x^3-x^2+3x+5=A(3x+1)-2x+3$

よって　$A(3x+1)=6x^3-x^2+5x+2$

ゆえに，A は $6x^3-x^2+5x+2$ を $3x+1$ で割ったときの商である。

$$\begin{array}{r}
2x^2-\ x+2\\
3x+1\,\big)\,\overline{6x^3-\ x^2+5x+2}\\
6x^3+2x^2\qquad\qquad\\
\hline
-3x^2+5x+2\\
-3x^2-\ x\qquad\\
\hline
6x+2\\
6x+2\\
\hline
0
\end{array}$$

右の計算から　$A=\underline{\underline{2x^2-x+2}}$

(3)　(与式)$=\dfrac{(x+2)(x-1)}{(x+2)(x-8)}\times\dfrac{x(x-8)}{(x-1)(2x+1)}=\underline{\underline{\dfrac{x}{2x+1}}}$

(4)　(与式)$=\dfrac{(2-i)^2}{(2+i)(2-i)}-\dfrac{(3+i)^2}{(3-i)(3+i)}=\dfrac{4-4i+i^2}{4-i^2}-\dfrac{9+6i+i^2}{9-i^2}$

$=\dfrac{3-4i}{5}-\dfrac{8+6i}{10}=\dfrac{3-4i}{5}-\dfrac{4+3i}{5}=\underline{\underline{-\dfrac{1}{5}-\dfrac{7}{5}i}}$

(5)　解と係数の関係から　$\alpha+\beta=4$，$\alpha\beta=-2$

$\alpha^3+\beta^3=(\alpha+\beta)^3-3\alpha\beta(\alpha+\beta)=4^3-3\cdot(-2)\cdot4=\underline{\underline{88}}$

(6)　点Ｐの座標を $(x,\ y)$ とすると

$AP^2=(x+1)^2+(y-2)^2$，$BP^2=(x-3)^2+(y-1)^2$

$AP^2-BP^2=4$ であるから

$(x+1)^2+(y-2)^2-\{(x-3)^2+(y-1)^2\}=4$

整理すると　$8x-2y-9=0$

すなわち　$y=4x-\dfrac{9}{2}$　……①

よって，点Ｐは直線①上にある。

逆に，この直線①上のすべての点 $P(x,\ y)$ は，条件を満たす。

したがって，求める軌跡は　$\underline{\underline{\text{直線 } y=4x-\dfrac{9}{2}}}$

(7)　$x+2y-10=0\cdots$①，$2x+3y-7=0\cdots$②

①×2−②から　$y-13=0$　よって　$y=13$

①から　$x=-2\times13+10=-16$　２直線の交点は $(-16,13)$

２点 $(-16,13)$，$(5,6)$ を通る直線の方程式は

$y=\dfrac{6-13}{5-(-16)}(x-5)+6$ から　整理すると　$\underline{\underline{x+3y-23=0}}$

別解

k を定数として，方程式

$k(x+2y-10)+(2x+3y-7)=0$　……①

を考えると，

①は２直線 $x+2y-10=0$，$2x+3y-7=0$ の交点を通る直線を表す。

直線①が点 $(5,\ 6)$ を通るとき

$k(5+2\cdot6-10)+(2\cdot5+3\cdot6-7)=0$　よって　$k=-3$

この k の値を①に代入して整理すると　$x+3y-23=0$

(8)　斜線部分は放物線 $y=\dfrac{1}{2}x^2-1$ の上側および直線 $y=-x$ の下側の部分である。

境界線を含むから，求める不等式は

$$\underline{\underline{\begin{cases}y\geqq\dfrac{1}{2}x^2-1\\ y\leqq-x\end{cases}}}$$

(9)　$(\sin\theta+\cos\theta)^2=\sin^2\theta+2\sin\theta\cos\theta+\cos^2\theta$

$=1+2\sin\theta\cos\theta=1+2\times\dfrac{2}{5}=\dfrac{9}{5}$

θ の動径が第１象限にあるから　$\sin\theta>0$，$\cos\theta>0$

よって，$\sin\theta+\cos\theta>0$ であるから　$\sin\theta+\cos\theta=\dfrac{3}{\sqrt{5}}=\underline{\underline{\dfrac{3\sqrt{5}}{5}}}$

(10)　(おうぎ形ORS)$=\dfrac{1}{2}\times5^2\times\theta=\dfrac{25}{2}\theta$　(おうぎ形OPQ)$=\dfrac{1}{2}\times3^2\times\theta=\dfrac{9}{2}\theta$

$\dfrac{25}{2}\theta-\dfrac{9}{2}\theta=2\pi$ より　$8\theta=2\pi$　したがって　$\underline{\underline{\theta=\dfrac{\pi}{4}}}$

(11)　$\sin2\theta=2\sin\theta\cos\theta$ より　$2\sin\theta\cos\theta=\cos\theta$

$2\sin\theta\cos\theta-\cos\theta=0$　よって $\cos\theta(2\sin\theta-1)=0$

ゆえに　$\cos\theta=0$ または $\sin\theta=\dfrac{1}{2}$

$0\leqq\theta<2\pi$ であるから

$\cos\theta=0$ のとき　$\theta=\dfrac{\pi}{2},\dfrac{3}{2}\pi$　…　①

$\sin\theta=\dfrac{1}{2}$ のとき　$\theta=\dfrac{\pi}{6},\dfrac{5}{6}\pi$　…　②

①②より $\underline{\underline{\theta=\dfrac{\pi}{6},\dfrac{\pi}{2},\dfrac{5}{6}\pi,\dfrac{3}{2}\pi}}$

(12)　$\sqrt[3]{5}\times\sqrt[4]{5}\div\sqrt[12]{5}=5^{\frac{1}{3}}\times5^{\frac{1}{4}}\div5^{\frac{1}{12}}=5^{\frac{1}{3}+\frac{1}{4}-\frac{1}{12}}=5^{\frac{1}{2}}=\underline{\underline{\sqrt{5}}}$

(13)　6^{25} について常用対数をとると

$\log_{10}6^{25}=25\log_{10}6=25(\log_{10}2+\log_{10}3)=25(0.3010+0.4771)=19.4525$

よって $19<\log_{10}6^{25}<20$ より　$10^{19}<6^{25}<10^{20}$　6^{25} は $\underline{\underline{20桁}}$

(14)　$f(x)=x^3-5x^2$ から　$f'(x)=3x^2-10x$

よって　$\displaystyle\lim_{h\to0}\frac{f(4+h)-f(4)}{h}=f'(4)=3\cdot4^2-10\cdot4=\underline{\underline{8}}$

(15)　$\displaystyle\int_0^2f(t)\,dt=a$ とおくと　$f(x)=3x^2-ax+2$

よって　$\displaystyle\int_0^2f(t)\,dt=\int_0^2(3t^2-at+2)\,dt=\left[t^3-\frac{a}{2}t^2+2t\right]_0^2=12-2a$

ゆえに　$12-2a=a$　これを解いて　$a=4$

したがって　$\underline{\underline{f(x)=3x^2-4x+2}}$

［β−1 三角関数］(1),(2) 各５点，(3)(ア) ３点（イ) ７点

(1)　$y=a\sin(b\theta-c)$ を変形すると　$y=a\sin b\left(\theta-\dfrac{c}{b}\right)$　……①

図から，振幅が２より　$\underline{\underline{a=2}}$

また，周期が　$\dfrac{4}{3}\pi-\dfrac{\pi}{3}=\pi$　より　$2\pi\div b=\pi$　よって　$\underline{\underline{b=2}}$

このとき，①は　$y=2\sin2\left(\theta-\dfrac{c}{2}\right)$

よって，図のグラフは，$y=2\sin2\theta$ のグラフを θ 軸方向に $\dfrac{c}{2}$ だけ平行移動したものである。

ここで，$0<c<2\pi$ から　$0<\dfrac{c}{2}<\pi$　よって　$\dfrac{c}{2}=\dfrac{\pi}{3}$　ゆえに　$\underline{\underline{c=\dfrac{2}{3}\pi}}$

(2)　$\theta-\dfrac{\pi}{3}=t$ とおくと　$\cos t<-\dfrac{\sqrt{3}}{2}$　……①

$0\leqq\theta<2\pi$ のとき　$-\dfrac{\pi}{3}\leqq t<\dfrac{5}{3}\pi$　であるから，この範囲で①を解くと

$\dfrac{5}{6}\pi<t<\dfrac{7}{6}\pi$

すなわち　$\dfrac{5}{6}\pi<\theta-\dfrac{\pi}{3}<\dfrac{7}{6}\pi$　よって　$\underline{\underline{\dfrac{7}{6}\pi<\theta<\dfrac{3}{2}\pi}}$

(3)　(ア)　$y=2(1-\sin^2\theta)+2\sin\theta+1$

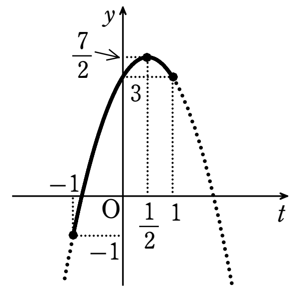
$=-2\sin^2\theta+2\sin\theta+3$

$\sin\theta=t$ とおくと，$y=-2t^2+2t+3$

(イ)　$y=-2t^2+2t+3$

$=-2(t^2-t)+3$

$=-2\left(t-\dfrac{1}{2}\right)^2+\dfrac{7}{2}$　3点



$0\leqq\theta<2\pi$ であるから　$-1\leqq t\leqq1$　……①

①の範囲において，y は

$t=\dfrac{1}{2}$ で最大値 $\dfrac{7}{2}$，

$t=-1$ で最小値 -1　をとる。　5点

$0\leqq\theta<2\pi$ であるから，$t=\dfrac{1}{2}$ ならば　$\theta=\dfrac{\pi}{6}$，$\dfrac{5}{6}\pi$

$t=-1$ ならば　$\theta=\dfrac{3}{2}\pi$

よって　$\underline{\underline{\theta=\dfrac{\pi}{6},\ \dfrac{5}{6}\pi \text{ で最大値 } \dfrac{7}{2},\ \theta=\dfrac{3}{2}\pi \text{ で最小値 } -1}}$　7点

[$\beta-2$ 微分法と積分法] (1), (2) 各5点, (3)(ア) 3点 (イ) 7点

(1) $f'(x)=-x^3+2x-4$

$f(x)=\int f'(x)dx=-\dfrac{1}{4}x^4+x^2-4x+C$　　Cは積分定数

$f(-2)=1$ より $-4+4-8+C=1$ したがって $C=-7$

よって $\underline{\underline{f(x)=-\dfrac{1}{4}x^4+x^2-4x-7}}$

(2) $f'(x)=3x^2-2kx+3$

$\dfrac{D}{4}=(-k)^2-9>0$

$(k+3)(k-3)>0$

よって $\underline{\underline{k<-3,\ 3<k}}$

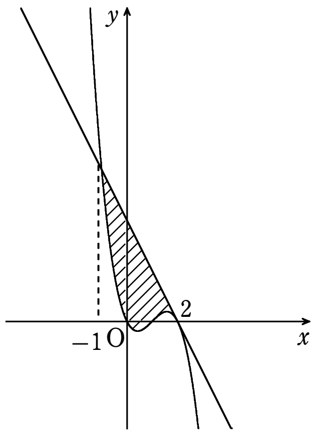
(3)(ア) $y'=-3x^2+6x-2$

$x=2$のとき、$y'=-12+12-2$
$=-2$

接線は点$(2,\ 0)$で傾き-2の直線

$y-0=-2(x-2)$

よって接線は $\underline{\underline{y=-2x+4}}$



(イ) $\begin{cases} y=-x^3+3x^2-2x \\ y=-2x+4 \end{cases}$ を解くと

$-x^3+3x^2-2x=-2x+4$

$x^3-3x^2+4=0$

$(x+1)(x-2)^2=0$

$x=-1,\ 2$　　3点

また $y=-x^3+3x^3-2x$ と $y=-2x+4$ のグラフをかくと上の図のようになる。

求める面積を S とすると

$S=\int_{-1}^{2}\{(-2x+4)-(-x^3+3x^2-2x)\}dx$　　5点

$=\underline{\underline{\dfrac{27}{4}}}$　　7点

[$\beta-3$ ベクトル] (1), (2) 各5点, (3)(ア) 3点 (イ) 7点

(1) 内積は $\vec{a}\cdot\vec{b}=(-1)\times2+5\times3=13$

$|\vec{a}|=\sqrt{(-1)^2+5^2}=\sqrt{26}$,　$|\vec{b}|=\sqrt{2^2+3^2}=\sqrt{13}$

よって　$\cos\theta=\dfrac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{|\vec{a}||\vec{b}|}=\dfrac{13}{\sqrt{26}\times\sqrt{13}}=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$

$0^\circ\leqq\theta\leqq180^\circ$ であるから　$\underline{\underline{\theta=45^\circ}}$

(2) $\overrightarrow{OP}=(x,\ 12,\ 1)$, $\overrightarrow{OA}=(-2,\ 3,\ -1)$, $\overrightarrow{OB}=(3,\ 2,\ 1)$ に対して,

$\overrightarrow{OP}=s\overrightarrow{OA}+t\overrightarrow{OB}$ となる実数 s, t が存在するから

$(x,\ 12,\ 1)=s(-2,\ 3,\ -1)+t(3,\ 2,\ 1)$

すなわち　$(x,\ 12,\ 1)=(-2s+3t,\ 3s+2t,\ -s+t)$

よって　$x=-2s+3t$, $12=3s+2t$, $1=-s+t$

これを解くと　$s=2$, $t=3$, $x=5$

ゆえに　$\underline{\underline{x=5}}$

(3) (ア) $3\overrightarrow{AP}+2\overrightarrow{BP}+\overrightarrow{CP}=\vec{0}$ から

$3\overrightarrow{AP}+2(\overrightarrow{AP}-\overrightarrow{AB})+(\overrightarrow{AP}-\overrightarrow{AC})=\vec{0}$

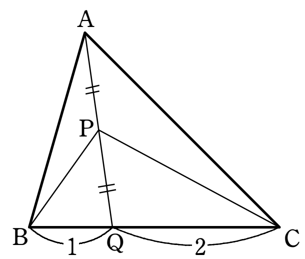
$6\overrightarrow{AP}-2\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{AC}=\vec{0}$

よって　$\overrightarrow{AP}=\dfrac{2\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}}{6}=\dfrac{2\vec{b}+\vec{c}}{6}$

(イ) 直線APと辺BCの交点をQとする。

$\overrightarrow{AP}=\dfrac{2\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}}{6}=\dfrac{3}{6}\times\dfrac{2\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}}{1+2}=\dfrac{1}{2}\overrightarrow{AQ}$　　4点

と変形できることから，点Pと点Qは右図のようになる。



△ABC の面積を S とする。

△PBC と △ABC において，辺 BC を共通の底辺とみると，△PBC と △ABC の高さの比は PQ : AQ に等しい。PQ : AQ = 1 : 2 であるから

$\triangle PBC=\dfrac{1}{2}\triangle ABC=\dfrac{1}{2}S$　……①

△PCA と △QCA において，底辺をそれぞれ AP，AQ とみると，2つの三角形の高さは等しい。
AP : AQ = 1 : 2 であるから

$\triangle PCA=\dfrac{1}{2}\triangle QCA$

また，△QCA と △ABC において，辺 CA を共通の底辺とみると，△QCA と △ABC の高さの比は QC : BC に等しい。QC : BC = 2 : 3 であるから

$\triangle QCA=\dfrac{2}{3}\triangle ABC=\dfrac{2}{3}S$

よって　$\triangle PCA=\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{2}{3}S\right)=\dfrac{1}{3}S$　……②

同様に考えて

$\triangle PAB=\dfrac{1}{2}\triangle QAB=\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{1}{3}\triangle ABC\right)=\dfrac{1}{6}S$　……③

①, ②, ③ から

$\triangle PAB:\triangle PBC:\triangle PCA=\dfrac{1}{6}S:\dfrac{1}{2}S:\dfrac{1}{3}S=\underline{\underline{1:3:2}}$　　7点

[$\beta-4$ 数列] (1), (2) 各5点, (3)(ア) 3点 (イ) 7点

(1) この数列の初項を a，公差を d とすると　$a_n=a+(n-1)d$

第6項が13であるから　$a+5d=13$　……①

第15項が31であるから　$a+14d=31$　……②

①, ② を解いて　$a=3$, $d=2$

よって，一般項は　$a_n=3+(n-1)\cdot2=\underline{\underline{2n+1}}$

(2) $a_n\fallingdotseq0$ であるから，漸化式の両辺の逆数をとると

$\dfrac{1}{a_{n+1}}=\dfrac{1}{4a_n}+\dfrac{1}{2}$

$\dfrac{1}{a_n}=b_n$ とおくと　$b_{n+1}=\dfrac{1}{4}b_n+\dfrac{1}{2}$, $b_1=1$

$b_{n+1}=\dfrac{1}{4}b_n+\dfrac{1}{2}$ を変形すると

$b_{n+1}-\dfrac{2}{3}=\dfrac{1}{4}\left(b_n-\dfrac{2}{3}\right)$　　また　$b_1-\dfrac{2}{3}=\dfrac{1}{3}$

よって，数列 $\left\{b_n-\dfrac{2}{3}\right\}$ は初項 $\dfrac{1}{3}$，公比 $\dfrac{1}{4}$ の等比数列で

$b_n-\dfrac{2}{3}=\dfrac{1}{3}\cdot\left(\dfrac{1}{4}\right)^{n-1}$

したがって，数列 $\{b_n\}$ の一般項は　$b_n=\dfrac{1}{3}\cdot\left(\dfrac{1}{4}\right)^{n-1}+\dfrac{2}{3}$

$a_n=\dfrac{1}{b_n}$ であるから，数列 $\{a_n\}$ の一般項は　$a_n=\dfrac{1}{\dfrac{1}{3}\cdot\left(\dfrac{1}{4}\right)^{n-1}+\dfrac{2}{3}}=\underline{\underline{\dfrac{3\cdot4^{n-1}}{1+2^{2n-1}}}}$

(3)

(ア) $n\geqq2$ のとき，第1群から第 $(n-1)$ 群までにある奇数の

個数は　$\sum_{k=1}^{n-1}k=\dfrac{1}{2}(n-1)n$　　3点

よって，第 n 群の最初の数は，もとの数列の

$\left\{\dfrac{1}{2}(n-1)n+1\right\}$ 番目の項であるから　　5点

$2\left\{\dfrac{1}{2}(n-1)n+1\right\}-1=n^2-n+1$　　7点

これは $n=1$ のときにも成り立つ。　　ない場合は−1点

よって，第 n 群の最初の数は　$\underline{\underline{n^2-n+1}}$

(イ) 第20群にある奇数の列は，初項 $20^2-20+1=381$，公差 2，項数 20 の等差数列である。よって，求める和は

$\dfrac{1}{2}\cdot20\cdot\{2\cdot381+(20-1)\cdot2\}=\underline{\underline{8000}}$