数学学力テストＳＩβ　詳解

共通問題　　各4点

(1)　$xy-xz-y^2+z^2=(y-z)x-(y+z)(y-z)=\underline{\underline{(y-z)(x-y-z)}}$

(2)　$x=\dfrac{1}{\sqrt{5}-2}\times\dfrac{\sqrt{5}+2}{\sqrt{5}+2}=\sqrt{5}+2$

$y=\dfrac{1}{\sqrt{5}+2}\times\dfrac{\sqrt{5}-2}{\sqrt{5}-2}=\sqrt{5}-2$

ここで，$x+y=2\sqrt{5}$，$xy=1$ より

$\dfrac{y}{x}+\dfrac{x}{y}=\dfrac{y^2+x^2}{xy}=\dfrac{(x+y)^2-2xy}{xy}=(2\sqrt{5})^2-2\cdot1=\underline{\underline{18}}$

(3)　求める２次関数は $y=a(x-1)^2-3$ とおける。

点 (4，0) を通るから，

$0=a(4-1)^2-3$　　$a=\dfrac{1}{3}$　　よって，$\underline{\underline{y=\dfrac{1}{3}(x-1)^2-3}}$

(4)　２次方程式 $-x^2+2mx-m-12=0$ の判別式 D とおくと，

$\dfrac{D}{4}=m^2-m-12$

与えられた２次不等式の x^2 の係数が負であるから，

$-x^2+2mx-m-12\leqq0$ が常に成り立つための必要十分条件は $D\leqq0$

$m^2-m-12\leqq0$ より，$(m+3)(m-4)\leqq0$

$\underline{\underline{-3\leqq m\leqq4}}$

(別解)　$y=-x^2+2mx-m-12$ とおくと，

$y=-(x-m)^2+m^2-m-12$ より，

頂点の座標は $(m,\ m^2-m-12)$

$y\leqq0$ となるとき，　$m^2-m-12\leqq0$ より，

$(m+3)(m-4)\leqq0$　　　$\underline{\underline{-3\leqq m\leqq4}}$

(5)　建物の高さ PQ を x m とすると

$\mathrm{AQ}=x\tan45^\circ=x$，　$\mathrm{BQ}=x\tan60^\circ=\sqrt{3}x$

△ABQ は直角三角形であるから　　$x^2+(\sqrt{3}x)^2=20^2$

したがって　　$x^2=100$

$x>0$ であるから　　$x=10$

よって，建物の高さは　　$\underline{\underline{10\ \mathrm{m}}}$

(6)　△ABC において，余弦定理より

$\cos B=\dfrac{8^2+5^2-7^2}{2\cdot8\cdot5}=\dfrac{1}{2}$　　$\angle B=\underline{\underline{60^\circ}}$

(7)　$a^2+3=7$ から　$a=\pm2$

$a=2$ のとき，

$A=\{2,\ 6,\ 7\}$，$B=\{3,\ 7,\ 2,\ 6\}$ となり，$A\cap B=\{2,\ 7\}$ を満たさない。

$a=-2$ のとき，$A=\{2,\ 6,\ 7\}$，$B=\{3,\ 7,\ -2,\ 2\}$ となり，

$A\cap B=\{2,\ 7\}$ を満たす。　よって　$\underline{\underline{a=-2}}$

(8)　「四角形ABCDがひし形ならば四角形ABCDは正方形である」は偽である。

「四角形ABCDが正方形ならば四角形ABCDはひし形である」は真である。

これより，四角形ABCDがひし形であることは四角形ABCDが正方形であるための

「必要条件であるが，十分条件ではない」

したがって，$\underline{\underline{①}}$である

(9)　このデータの平均値は　$\dfrac{5+9+3+1+7}{5}=\dfrac{25}{5}=5$

このデータの変量をそれぞれ２乗するとき，その平均値は

$\dfrac{5^2+9^2+3^2+1^2+7^2}{5}=\dfrac{165}{5}=33$

このとき，このデータの分散は　$33-5^2=8$

したがって，このデータの標準偏差は　$\sqrt{8}=2\times1.41\fallingdotseq\underline{\underline{2.8}}$

(10)　$\dfrac{7!}{2!3!}=\dfrac{7\cdot6\cdot5\cdot4\cdot3\cdot2\cdot1}{2\cdot1\cdot3\cdot2\cdot1}=\underline{\underline{420（通り）}}$

(11)　３回目まで連続して赤を引き，４回目で白が出るため，

求める確率は　$\dfrac{9}{12}\times\dfrac{8}{11}\times\dfrac{7}{10}\times\dfrac{3}{9}=\underline{\underline{\dfrac{7}{55}}}$

(12)　△ADC と直線 EB に，メネラウスの定理を用いると

$\dfrac{\mathrm{AB}}{\mathrm{BD}}\cdot\dfrac{\mathrm{DF}}{\mathrm{FC}}\cdot\dfrac{\mathrm{CE}}{\mathrm{EA}}=1$

よって　　$\dfrac{7}{4}\cdot\dfrac{\mathrm{DF}}{\mathrm{FC}}\cdot\dfrac{5}{7}=1$

$\dfrac{\mathrm{DF}}{\mathrm{FC}}=\dfrac{4}{5}$

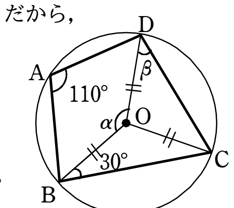
よって　　$\underline{\underline{\mathrm{DF}:\mathrm{FC}=4:5}}$

(13)　円に内接する四角形の対角の和は 180° だから，

$\angle\mathrm{BAD}+\angle\mathrm{BCD}=180^\circ$

よって　　$\angle\mathrm{BCD}=180^\circ-\angle\mathrm{BAD}$

$=180^\circ-110^\circ=70^\circ$



また，円周角の定理により

$\alpha=2\angle\mathrm{BCD}=2\times70^\circ=140^\circ$

△OBC は OB＝OC の二等辺三角形であるから

$\angle\mathrm{OCB}=30^\circ$

△OCD は OC＝OD の二等辺三角形であるから

$\beta=\angle\mathrm{OCD}=\angle\mathrm{BCD}-\angle\mathrm{OCB}$

$=70^\circ-30^\circ=40^\circ$　　　$\underline{\underline{\alpha=140^\circ,\ \beta=40^\circ}}$

(14)　２つの自然数を a，b $(a\leqq b)$ とすると，これらの最大公約数が 84 であるから，

$a=84a'$，$b=84b'$　(a'，b' は互いに素な自然数)

とおける。

$a+b=756$ より

$84(a'+b')=756$

$a'+b'=9$

これを満たす互いに素な自然数 a'，b' $(a'\leqq b')$ は

$(a',\ b')=(1,\ 8)$，$(2,\ 7)$，$(4,\ 5)$

このとき　　$(a,\ b)=(84,\ 672)$，$(168,\ 588)$，$(336,\ 420)$

a，b は３桁の自然数であるから，求める自然数の組は

$\underline{\underline{(168,\ 588),\ (336,\ 420)}}$

(15)　□ に入る数を a (ただし，a は 0 から 9 の整数) とする。

４桁の自然数 $213a$ が 12 の倍数であるとき，

4桁の自然数 $213a$ は３の倍数かつ４の倍数である。

下２桁 $3a$ が４の倍数であるから　　$a=2$，6　……①

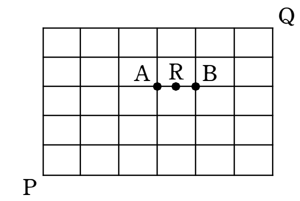
また，４桁の自然数 $213a$ が３の倍数であるとき，$2+1+3+a$

すなわち $a+6$ が３の倍数である。

① のうち，$a+6$ が３の倍数となるのは　　$\underline{\underline{a=6}}$

［β−1］場合の数　　(1)(2) 各5点，(3) 10点

(1)　Rの区間の左端を A，右端を B とする。



P から A まで行く経路は　$\dfrac{6!}{3!3!}$ 通り

B から Q まで行く経路は　$\dfrac{4!}{2!2!}$ 通り

よって，Rを通る経路は

$\dfrac{6!}{3!3!}\times\dfrac{4!}{2!2!}=\underline{\underline{120（通り）}}$

(2)　選び出された生徒が自転車通学者であるという事象を A，女子であるという事象を B とすると

$P(A)=\dfrac{5}{11}\times\dfrac{1}{3}+\dfrac{6}{11}\times\dfrac{2}{5}=\dfrac{5}{33}+\dfrac{12}{55}=\dfrac{25+36}{165}=\dfrac{61}{165}$，

$P(A\cap B)=\dfrac{12}{55}$

よって，求める確率は

$P_A(B)=\dfrac{P(A\cap B)}{P(A)}=\dfrac{12}{55}\div\dfrac{61}{165}=\underline{\underline{\dfrac{36}{61}}}$

(3)　９枚のカードの中から３枚を取り出す場合の総数は　${}_9\mathrm{C}_3$ 通り

$\mathrm{X}\geqq4$ となるのは　　(i) X＝4　　(ii) X＝5　　(iii) X＝6

の場合であり，これらの事象 (i) ～ (iii) は互いに排反である。

(i) X＝4 のとき

取り出したカードが 0 が１枚，２が２枚の場合と，１が２枚，２が１枚の場合である。

これらの事象は互いに排反であるから，

$\dfrac{{}_2\mathrm{C}_1\times{}_3\mathrm{C}_2}{{}_9\mathrm{C}_3}+\dfrac{{}_4\mathrm{C}_2\times{}_3\mathrm{C}_1}{{}_9\mathrm{C}_3}=\dfrac{6}{84}+\dfrac{18}{84}=\dfrac{24}{84}$　3

(ii) X＝5 のとき

取り出したカードが１が１枚，２が２枚の場合であるから，

$\dfrac{{}_4\mathrm{C}_1\times{}_3\mathrm{C}_2}{{}_9\mathrm{C}_3}=\dfrac{12}{84}$　6

(iii) X＝6 のとき

取り出したカードが２が３枚の場合であるから，

$\dfrac{{}_3\mathrm{C}_3}{{}_9\mathrm{C}_3}=\dfrac{1}{84}$

(i) ～ (iii) より

$\dfrac{24}{84}+\dfrac{12}{84}+\dfrac{1}{84}=\underline{\underline{\dfrac{37}{84}}}$　10

［β－2］整数　(1)(2) 各5点, (3) 10点

(1)　与えられた方程式を

$11x-8y=1$ …①

とすると，$x=3$, $y=4$ は①の整数解の１つである。

よって，

$11\cdot3-8\cdot4=1$ …②

①－②　から

$11(x-3)-8(y-4)=0$

$11(x-3)=8(y-4)$…③

11 と 8 は互いに素なので，k を整数とすると

$x-3=8k$　これを③に代入して整理すると，

求める整数解は　$x=8k+3$, $y=11k+4$（k は整数）

(2)　N を素因数分解したときの素因数2の個数は，明らかに素因数5の個数より多い。

よって，N を計算した時の末尾に並ぶ0の個数は，N を素因数分解したときの素因数5の個数に一致する。

5 の倍数の個数は，40個

5^2 の倍数の個数は，8個

5^3 の倍数の個数は，1個

$200<5^4$ であるから，5^n ($n\geqq4$) の倍数はない。

よって，素因数5の個数は，全部で $40+8+1=49$

したがって，末尾には0が49個連続して並ぶ。

(3)　$\sqrt{n^2-35}=m$（m は自然数）とおく。

両辺を２乗すると

$n^2-35=m^2$

$n^2-m^2=35$

$(n+m)(n-m)=35$ △3

ここで n, m は自然数であり，$n^2-m^2>0$ より，$n>m$ であるから

$n+m$, $n-m$ も自然数であり，

$n+m>n-m$

よって，$(n+m, n-m)=(35, 1), (7, 5)$ △6

これより，$(n, m)=(18, 17), (6, 1)$

したがって，$n=6, 18$ ⑩

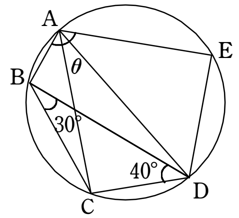
［β－3］平面図形　(1)(2) 各5点, (3) 10点

(1)　図に線分AC, ADをかく。

円周角の定理より，∠BDC＝∠BAC＝40°　…①　∠CBD＝∠CAD＝30°　…②

さらに $\overset{\frown}{\mathrm{BC}}=\overset{\frown}{\mathrm{DE}}$ より，円周角と弧の関係を用いると∠BDC＝∠DAE＝40°　…③

①, ②, ③より　θ＝∠BAC＋∠CAD＋∠DAE＝40°＋30°＋40°＝110°



(2)　直線POと円Oの交わる点を点Pから近い順に点C，点Dとする。

PC＝x とおくと，PD＝$x+12$

よって方べきの定理より，

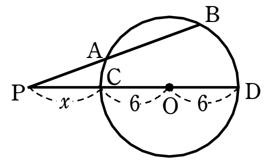
PA·PB＝PC·PD

$64=x(x+12)$

$x^2+12x-64=0$

$(x-4)(x+16)=0$

ここで $x>0$ であるから，$x=4$　　したがってOP＝4＋6＝10



(3)　円Oの半径を r とすると

∠A＝∠ORA＝∠OQA＝90°

OR＝OQ＝r

よって，四角形AROQは1辺の長さが r の正方形であるから

AR＝AQ＝r △3

また　BR＝BP＝5, CQ＝CP＝12

したがって，直角三角形ABCにおいて

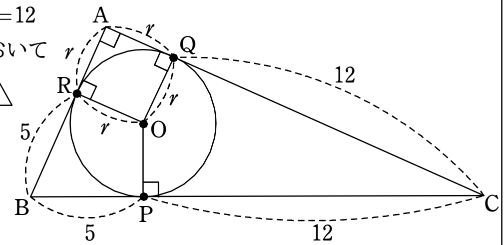
$(r+5)^2+(r+12)^2=(5+12)^2$ △6

よって　$r^2+17r-60=0$

すなわち　$(r-3)(r+20)=0$

$r>0$ であるから　$r=3$

すなわち，円Oの半径は3 ⑩



［β－4］2次関数　(1)(2) 各5点, (3) 10点

(1)　放物線 $y=-2x^2+5x+1$ を x 軸方向に１，y 軸方向に -3 だけ平行移動するので，

$y-(-3)=-2(x-1)^2+5(x-1)+1$

整理すると

$y=-2x^2+9x-9$

y を $-y$ におき換えると，

$-y=-2x^2+9x-9$

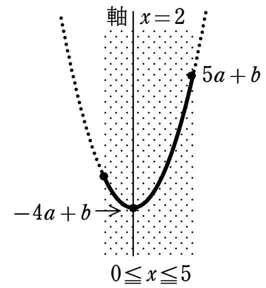
整理すると，

$y=2x^2-9x+9$

(2)　$y=ax^2-4ax+b$ を変形すると

$y=a(x-2)^2-4a+b$

$a>0$ のとき，この関数のグラフは右の図の実線部分である。



この関数は

$x=5$ で最大値 $5a+b$

$x=2$ で最小値 $-4a+b$

をとるから

$5a+b=15$,　$-4a+b=-3$

この連立方程式を解いて　$a=2$, $b=5$

(3)　$f(x)=x^2-2mx+1$ とすると　$f(x)=(x-m)^2+1-m^2$

よって，$y=f(x)$ のグラフは下に凸の放物線で，軸は直線 $x=m$

$0\leqq x\leqq2$ で常に $f(x)>0$ が成り立つのは，$0\leqq x\leqq2$ における $f(x)$ の最小値が正となるときである。

[1]　$m<0$ のとき

$0\leqq x\leqq2$ における $f(x)$ の最小値は　$f(0)=1$

これは正であるから，$m<0$ ……①のとき，条件を満たす。△3

[2]　$0\leqq m\leqq2$ のとき

$0\leqq x\leqq2$ における $f(x)$ の最小値は　$f(m)=1-m^2$

よって　$1-m^2>0$　　すなわち　$(m+1)(m-1)<0$

ゆえに　$-1<m<1$

これと $0\leqq m\leqq2$ の共通範囲は　$0\leqq m<1$ ……② △6

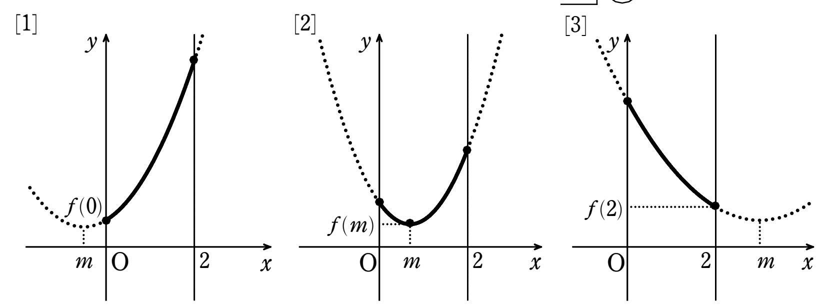
[3]　$2<m$ のとき

$0\leqq x\leqq2$ における $f(x)$ の最小値は　$f(2)=5-4m$

よって　$5-4m>0$

ゆえに　$m<\frac{5}{4}$　　これと $m>2$ の共通範囲はない。

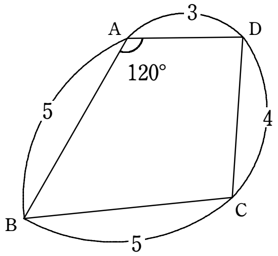
求める m の値の範囲は，①と②の範囲を合わせて　$m<1$ ⑩



［ $\beta-5$ ］図形と計量　　(1) (2) 各5点, (3) 10点

(1)　$\tan 55^\circ = \dfrac{1}{\tan 35^\circ}$，$\tan 10^\circ = \dfrac{1}{\tan 80^\circ}$ より，

$$\tan 55^\circ \tan 35^\circ + \tan 10^\circ \tan 80^\circ = \frac{1}{\tan 35^\circ} \times \tan 35^\circ + \frac{1}{\tan 80^\circ} \times \tan 80^\circ$$
$$= \underline{\underline{2}}$$



(2)　△ABDにおいて，余弦定理より，

$BD^2 = 5^2 + 3^2 - 2\times 5\times 3\times \cos 120^\circ$

$= 49$

$BD > 0$ より，$BD = 7$

△BCDにおいて，余弦定理より，

$$\cos C = \frac{5^2+4^2-7^2}{2\cdot 5\cdot 4} = \frac{-8}{2\cdot 5\cdot 4} = -\frac{1}{5}$$

$$\sin C = \sqrt{1-\cos^2 C} = \sqrt{1-\left(-\frac{1}{5}\right)^2} = \sqrt{\frac{24}{25}} = \frac{2\sqrt{6}}{5}$$

よって，四角形 ABCD の面積を S とすると

$S = \triangle ABD + \triangle BCD$

$$= \frac{1}{2}\cdot 5\cdot 3\sin 120^\circ + \frac{1}{2}\cdot 5\cdot 4\cdot \frac{2\sqrt{6}}{5} = \underline{\underline{\frac{15\sqrt{3}}{4} + 4\sqrt{6}}}$$

(3)　正弦定理より，　$\dfrac{\sqrt{3}}{\sin A} = \dfrac{1}{\sin C} = 2$

よって，　$\sin A = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$，$\sin C = \dfrac{1}{2}$ 3

$0^\circ < A < 180^\circ$，$0^\circ < C < 180^\circ$　であるから

$A = 60^\circ,\ 120^\circ$

$C = 30^\circ,\ 150^\circ$

ここで，AB＜BC より，$0^\circ < C < A < 180^\circ$

[1] $A = 60^\circ$，$C = 30^\circ$　のとき，

　このとき，$B = 90^\circ$ となり，△ABCは鈍角三角形にならない。

　よって，不適。

[2] $A = 120^\circ$，$C = 30^\circ$　のとき，

　このとき，$B = 30^\circ$ となり，△ABCは鈍角三角形である。

以上より，　$A = 120^\circ,\ B = 30^\circ,\ C = 30^\circ$ 6

したがって，△ABCは 二等辺三角形であるから　<u>AC=AB=1</u> 10