令和3年4月実施　数学学力テスト　SⅡβ　解答

SⅡβ 共通問題　各 4 点× 15 問＝計 60 点

(1) (与式)$=(3a+2b)\{(3a)^2-3a\cdot 2b+(2b)^2\}=(3a)^3+(2b)^3=\underline{\underline{27a^3+8b^3}}$

(2) (与式)$=\dfrac{16a^6b^6}{12x^2y^2}\times\dfrac{6x^3y}{20a^3b^6}=\underline{\underline{\dfrac{2a^3x}{5y}}}$

(3)
$$\begin{array}{r}
2x\ \ -1\phantom{-2}\\
3x+2\,\overline{\big)\,6x^2\ +x\ -2}\\
\underline{6x^2\ +4x\phantom{\ -2}}\\
-3x-2\\
\underline{-3x-2}\\
0
\end{array}$$
$\underline{\underline{商：2x-1,\ 余り：0}}$

(4) $\dfrac{5-3i}{3+5i}=\dfrac{(5-3i)(3-5i)}{(3+5i)(3-5i)}=\dfrac{15-34i+15i^2}{9-25i^2}=\dfrac{15-34i-15}{9+25}=\dfrac{-34i}{34}=-i$

よって　(与式)$=(-i)^2=i^2=\underline{\underline{-1}}$

別解 (与式)$=\dfrac{(5-3i)^2}{(3+5i)^2}=\dfrac{25-30i+9i^2}{9+30i+25i^2}=\dfrac{16-30i}{-16+30i}=\dfrac{16-30i}{-(16-30i)}=-1$

(5) 2数の和は $\dfrac{1+i}{3}+\dfrac{1-i}{3}=\dfrac{2}{3}$, 2数の積は $\dfrac{1+i}{3}\cdot\dfrac{1-i}{3}=\dfrac{1-i^2}{9}=\dfrac{1+1}{9}=\dfrac{2}{9}$

$\dfrac{1+i}{3}$, $\dfrac{1-i}{3}$ を解にもつ 2 次方程式の 1 つは, 解と係数の関係より

$x^2-\dfrac{2}{3}x+\dfrac{2}{9}=0$　　9 倍して　$\underline{\underline{9x^2-6x+2=0}}$

(6) 直線 AB の傾きは, $\dfrac{(y\text{の増加量})}{(x\text{ の増加量})}=\dfrac{1-(-5)}{1-(-2)}=\dfrac{6}{3}=2$

$\ell\perp$ ABより, ($\ell$ の傾き)$\times 2=-1$　であるから ($\ell$ の傾き)$=-\dfrac{1}{2}$

したがって　$y-(-2)=-\dfrac{1}{2}(x-6)$　から $\underline{\underline{y=-\dfrac{1}{2}x+1}}$

(7) 円の半径 $r$ は円の中心と直線との距離に等しく,

$r=\dfrac{|3\cdot 2+4\cdot 1+5|}{\sqrt{3^2+4^2}}=\dfrac{|15|}{5}=3$　　よって円の方程式は $\underline{\underline{(x-2)^2+(y-1)^2=9}}$

(8) (扇形の弧の長さ)=(半径)×(中心角(ラジアン))$=4\cdot\dfrac{\pi}{8}=\underline{\underline{\dfrac{\pi}{2}}}$

(9) $\sin\dfrac{\pi}{2}=1$ であり, 関数 $y=\sin\theta$ の周期は $2\pi$ であるから　$A=\dfrac{\pi}{2}+2\pi=\underline{\underline{\dfrac{5}{2}\pi}}$

(10)　A は第 2 象限の角であるから, $\cos A<0$ より

$\cos A=-\sqrt{1-\sin^2 A}=-\sqrt{1-\left(\dfrac{5}{13}\right)^2}=-\dfrac{12}{13}$

$B$ は第 4 象限の角であるから, $\sin B<0$ より,

$\sin B=-\sqrt{1-\cos^2 B}=-\sqrt{1-\left(\dfrac{4}{5}\right)^2}=-\dfrac{3}{5}$

$\sin(A+B)=\sin A\cos B+\cos A\sin B=\dfrac{5}{13}\cdot\dfrac{4}{5}+\left(-\dfrac{12}{13}\right)\cdot\left(-\dfrac{3}{5}\right)=\underline{\underline{\dfrac{56}{65}}}$

(11) (与式)$=(2^5)^{\frac{1}{4}}+(3^4\cdot 2)^{\frac{1}{4}}-(2^9)^{\frac{1}{4}}$

$=2\cdot 2^{\frac{1}{4}}+3\cdot 2^{\frac{1}{4}}-2^{\frac{9}{4}}=2\sqrt[4]{2}+3\sqrt[4]{2}-4\sqrt[4]{2}$

$\left(\because\ 2^{\frac{5}{4}}=2^1\cdot 2^{\frac{1}{4}},\ 2^{\frac{9}{4}}=2^2\cdot 2^{\frac{1}{4}}\right)=\underline{\underline{\sqrt[4]{2}}}$

(12) $y=x^6$ は増加関数であるから, 正の数は 6 乗しても大小は変わらない。

$(\sqrt{3})^6=3^{\frac{6}{2}}=27$, $(\sqrt[3]{5})^6=5^{\frac{6}{3}}=25$, $(\sqrt[6]{19})^6=19$

よって $(\sqrt[6]{19})^6<(\sqrt[3]{5})^6<(\sqrt{3})^6$　これから $\underline{\underline{\sqrt[6]{19}<\sqrt[3]{5}<\sqrt{3}}}$

(13) (与式)$=4\log_5 5^{\frac{1}{2}}-\dfrac{1}{3}\log_5 2+\dfrac{\log_5 2\cdot 5^3}{\log_5 5^3}$

$=4\cdot\dfrac{1}{2}\log_5 5-\dfrac{1}{3}\log_5 2+\dfrac{\log_5 2+\log_5 5^3}{3}=2-\dfrac{1}{3}\log_5 2+\dfrac{\log_5 2+3}{3}=\underline{\underline{3}}$

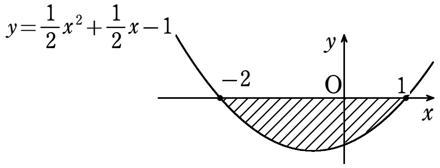
(14) $y=-2x^3+9x^2-6x+1$　よって　$\underline{\underline{y'=-6x^2+18x-6}}$

(15) $y=\dfrac{x^2+x-2}{2}=\dfrac{(x+2)(x-1)}{2}$

図より $-2\leqq x\leqq 1$ のとき $y\leqq 0$ であるから

$S=\displaystyle\int_{-2}^{1}(-y)\,dx=-\dfrac{1}{2}\int_{-2}^{1}(x^2+x-2)\,dx=-\dfrac{1}{2}\left[\dfrac{1}{3}x^3+\dfrac{1}{2}x^2-2x\right]_{-2}^{1}$

$=-\dfrac{1}{2}\left\{\left(\dfrac{1}{3}+\dfrac{1}{2}-2\right)-\left(-\dfrac{8}{3}+2+4\right)\right\}=\underline{\underline{\dfrac{9}{4}}}$




SⅡβ 選択問題　各群 20 点

[ β−1 三角関数 ]

(1) 式の両辺を 2 乗すると　$\sin^2\theta+2\sin\theta\cos\theta+\cos^2\theta=\dfrac{4}{9}$

$1+2\sin\theta\cos\theta=\dfrac{4}{9}$　より　$\sin\theta\cos\theta=-\dfrac{5}{18}$

$\sin^3\theta+\cos^3\theta=(\sin\theta+\cos\theta)(\sin^2\theta-\sin\theta\cos\theta+\cos^2\theta)$

$=\dfrac{2}{3}\left\{1-\left(-\dfrac{5}{18}\right)\right\}=\underline{\underline{\dfrac{23}{27}}}$

(2) $(1-2\sin^2\theta)+7\sin\theta-4=0$

$2\sin^2\theta-7\sin\theta+3=0$

$(2\sin\theta-1)(\sin\theta-3)=0$

$0\leqq\theta<2\pi$ より　$-1\leqq\sin\theta\leqq 1$　であるから　$\sin\theta=\dfrac{1}{2}$

よって　$\underline{\underline{\theta=\dfrac{\pi}{6},\ \dfrac{5}{6}\pi}}$

(3) (ア) $2\sin\left(\theta+\dfrac{\pi}{6}\right)+2\cos\theta=2\left(\dfrac{\sqrt{3}}{2}\sin\theta+\dfrac{1}{2}\cos\theta\right)+2\cos\theta$

$=\sqrt{3}\sin\theta+3\cos\theta=2\sqrt{3}\left(\dfrac{1}{2}\sin\theta+\dfrac{\sqrt{3}}{2}\cos\theta\right)=\underline{\underline{2\sqrt{3}\sin\left(\theta+\dfrac{\pi}{3}\right)}}$

(イ)　(ア) の結果から　$\sin\left(\theta+\dfrac{\pi}{3}\right)\geqq\dfrac{1}{2}$

ここで　$\theta+\dfrac{\pi}{3}=\alpha$　とおくと, $0\leqq\theta<2\pi$ より　$\dfrac{\pi}{3}\leqq\alpha<\dfrac{7}{3}\pi$

この範囲で $\sin\alpha\geqq\dfrac{1}{2}$ を解くと　$\dfrac{\pi}{3}\leqq\alpha\leqq\dfrac{5}{6}\pi$, $\dfrac{13}{6}\pi\leqq\alpha<\dfrac{7}{3}\pi$

つまり　$\dfrac{\pi}{3}\leqq\theta+\dfrac{\pi}{3}\leqq\dfrac{5}{6}\pi$, $\dfrac{13}{6}\pi\leqq\theta+\dfrac{\pi}{3}<\dfrac{7}{3}\pi$

したがって　$\underline{\underline{0\leqq\theta\leqq\dfrac{\pi}{2},\ \dfrac{11}{6}\pi\leqq\theta<2\pi}}$

※ (イ)の採点基準　$\sin\alpha\geqq\dfrac{1}{2}$ の形にして 2 点, $\alpha$ の範囲を求めて 3 点, 答で 2 点

令和3年4月実施　数学学力テスト　SⅡβ　解答

## [ β−2 微分法と積分法 ]

(1) $\displaystyle\lim_{x\to2}\frac{x^2+x-6}{x^2+3x-15}=\lim_{x\to2}\frac{(x+3)(x-2)}{(x+5)(x-2)}=\lim_{x\to2}\frac{x+3}{x+5}=\frac{2+3}{2+5}=\underline{\underline{\frac{5}{7}}}$

(2) $a(\neq0),\ b,\ c$ を定数として，$f(x)=ax^2+bx+c$ と表せる。

$f'(x)=2ax+b$ であるから，条件より

$$\begin{cases}f(-3)=28\\ f'(1)=1\\ f'(-1)=-7\end{cases}\ \text{となり}\ \begin{cases}9a-3b+c=28\\ 2a+b=1\\ -2a+b=-7\end{cases}\ \text{から}\ (a,\ b,\ c)=(2,\ -3,\ 1)$$

よって $\underline{\underline{f(x)=2x^2-3x+1}}$

(3) (ア) $y'=2x+1$ に $x=2$ を代入して，接線の傾きが $2\cdot2+1=5$ とわかる。

点 $(2,\ 5)$ を通るから　$y-5=5(x-2)$　から　$\underline{\underline{y=5x-5}}$

(イ) (ア) の接線と曲線 $C_2$ の交点を求めると，

$5x-5=-x^3+4x+5$　から　$x^3+x-10=(x-2)(x^2+2x+5)=0\ \cdots(*)$

$x^2+2x+5=(x+1)^2+4$ より，$x^2+2x+5=0$ は実数解をもたないから，

$(*)$ の解は $x=2$ であり，交点は $(2,\ 5)$

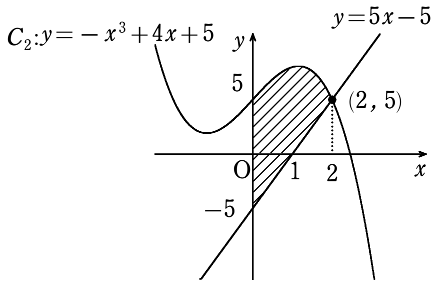
右図より

$S=\displaystyle\int_0^2\{(-x^3+4x+5)-(5x-5)\}dx$

$=\left[-\dfrac{1}{4}x^4-\dfrac{1}{2}x^2+10x\right]_0^2$

$=-\dfrac{1}{4}\cdot16-\dfrac{1}{2}\cdot4+10\cdot2-0$

$=\underline{\underline{14}}$




※ 記述問題(イ)の採点基準

積分の端が $x=2$ であることがわかって 3 点

$S=\displaystyle\int_0^2\{(-x^3+4x+5)-(5x-5)\}dx$ の立式で 2 点　答が計算できて 2 点

## [ β−3 ベクトル ]

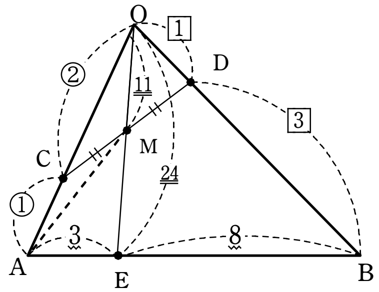
(1) $\overrightarrow{\mathrm{OC}}=\dfrac{1\overrightarrow{\mathrm{OA}}+2\overrightarrow{\mathrm{OB}}}{2+1}=\dfrac{1(1,\ 3,\ -1)+2(-5,\ 6,\ 8)}{3}=\dfrac{(-9,\ 15,\ 15)}{3}=\underline{\underline{(-3,\ 5,\ 5)}}$

(2) $|\vec{a}-\vec{b}|^2=13$ より　$|\vec{a}|^2-2\vec{a}\cdot\vec{b}+|\vec{b}|^2=13$

したがって $1^2-2\vec{a}\cdot\vec{b}+3^2=13$　　よって $\vec{a}\cdot\vec{b}=-\dfrac{3}{2}$

$|\vec{a}+\vec{b}|=\sqrt{|\vec{a}|^2+2\vec{a}\cdot\vec{b}+|\vec{b}|^2}=\sqrt{1^2+2\left(-\dfrac{3}{2}\right)+3^2}=\underline{\underline{\sqrt{7}}}$

(3) (ア) $\overrightarrow{\mathrm{OE}}=\dfrac{8\overrightarrow{\mathrm{OA}}+3\overrightarrow{\mathrm{OB}}}{8+3}=\underline{\underline{\dfrac{8\vec{a}+3\vec{b}}{11}}}$




(イ) $k$ を実数として $\overrightarrow{\mathrm{OM}}=k\overrightarrow{\mathrm{OE}}$ と表せるので

$\overrightarrow{\mathrm{OM}}=\dfrac{8k}{11}\vec{a}+\dfrac{3k}{11}\vec{b}\ \cdots$(i)

CM : MD $=s:(1-s)$ とおくと

$\overrightarrow{\mathrm{OM}}=(1-s)\overrightarrow{\mathrm{OC}}+s\overrightarrow{\mathrm{OD}}$

$=(1-s)\cdot\dfrac{2}{3}\vec{a}+s\cdot\dfrac{1}{4}\vec{b}\ \cdots$(ii)

$\vec{a}\neq\vec{0},\ \vec{b}\neq\vec{0},\ \vec{a}\not\parallel\vec{b}$ であるから，(i), (ii) より，

$$\begin{cases}\dfrac{8k}{11}=\dfrac{2(1-s)}{3}\\[2mm] \dfrac{3k}{11}=\dfrac{s}{4}\end{cases}\ \text{となり，}\ (s,\ k)=\left(\dfrac{1}{2},\ \dfrac{11}{24}\right)$$

よって CM : MD $=\dfrac{1}{2}:\left(1-\dfrac{1}{2}\right)=1:1$ であり，OE : OM $=1:k=1:\dfrac{11}{24}=24:11$

$\triangle\mathrm{OAB}=S$ とすると，$\triangle\mathrm{OAE}=\dfrac{3}{3+8}S=\dfrac{3}{11}S$,

$\triangle\mathrm{OAM}=\dfrac{11}{24}\triangle\mathrm{OAE}=\dfrac{11}{24}\cdot\dfrac{3}{11}\mathrm{S}=\dfrac{1}{8}S$

$\triangle\mathrm{OCM}=\dfrac{2}{2+1}\triangle\mathrm{OAM}=\dfrac{2}{3}\cdot\dfrac{1}{8}\mathrm{S}=\dfrac{1}{12}S$　よって $\underline{\underline{\dfrac{1}{12}}}$ 倍

※ 記述問題(イ)の採点基準

CM : MD $=1:1$ がわかって 2 点，OE : EM $=24:11$ がわかって 2 点，答で 3 点

## [ β−4 数列 ]

(1) 3 数を $a,\ ar,\ ar^2$ と表すと，$a+ar+ar^2=19$ より $a(r^2+r+1)=19\ \cdots$ ①

また $a\cdot ar\cdot ar^2=216$ より $(ar)^3=6^3$ であり，$ar$ は実数であるから，$ar=6\ \cdots$ ②

①÷② より，$\dfrac{r^2+r+1}{r}=\dfrac{19}{6}$　であるから $6r^2-13r+6=(2r-3)(3r-2)=0$

よって $r=\dfrac{3}{2},\ \dfrac{2}{3}$　これから② より，$(a,\ r)=\left(4,\ \dfrac{3}{2}\right),\ \left(9,\ \dfrac{2}{3}\right)$　である。

いずれの組合せにせよ，3 数は，$\underline{\underline{4,\ 6,\ 9}}$ の 3 つとなる。

(2) $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}(3k-1)^2=\sum_{k=1}^{n}(9k^2-6k+1)=9\sum_{k=1}^{n}k^2-6\sum_{k=1}^{n}k+\sum_{k=1}^{n}1$

$=9\cdot\dfrac{1}{6}n(n+1)(2n+1)-6\cdot\dfrac{1}{2}n(n+1)+n$

$=\dfrac{1}{2}n\{3(n+1)(2n+1)-6(n+1)+2\}=\underline{\underline{\dfrac{1}{2}n(6n^2+3n-1)}}$

(3) (ア) $3^2=2a_2+1$ から　$a_2=4,\ 4^2=3a_3+1$ から　$a_3=5$

$5^2=4a_4+1$ から　$a_4=6$　したがって $\underline{\underline{a_n=n+2}}$ であると推測される。

(イ) $a_n=n+2$　…… ① であることを示す。

[1]　$n=1$ のとき

① の右辺は　$1+2=3$

一方　初項は $a_1=3$ なので，$n=1$ のとき，① は成り立つ。

[2]　$n=k(\geqq1)$ のとき ① が成り立つ，すなわち $a_k=k+2$　…… ② と仮定する。

${a_k}^2=(k+1)a_{k+1}+1$ であるから，② より　$(k+2)^2=(k+1)a_{k+1}+1$

よって $k^2+4k+3=(k+1)a_{k+1}$　すなわち　$(k+1)(k+3)=(k+1)a_{k+1}$

両辺を $k+1\ (\neq0)$ で割ると　$a_{k+1}=k+3(=(k+1)+2)$

よって，$n=k+1$ のときにも ① は成り立つ。

[1], [2] から，すべての自然数 $n$ について ① は成り立つ。

※ 記述問題(イ)の採点基準

$a_1$ での確認と $n=k(\geqq1)$ での仮定が正しくできて 3 点，$a_{k+1}$ の計算ができて 2 点，

証明の締めくくりが正しく書けて 2 点