数学 学力テスト　SⅡ$\boldsymbol{\alpha}$　令和３年４月実施　解答　配点はすべて各4点

[α−1]　いろいろな式

(1)　$(\text{与式})=\dfrac{(3x+7)-(2x+3)}{x^2-16}=\dfrac{x+4}{x^2-16}=\dfrac{\cancel{x+4}}{\cancel{(x+4)}(x-4)}$

$=\underline{\underline{\dfrac{1}{x-4}}}$

(2)　$i^3=i^2\cdot i=-i$ であるから　$(\text{与式})=1-i-1-(-i)=\underline{0}$

(3)　解と係数の関係から　$\alpha+\beta=-2$，$\alpha\beta=3$

よって　$\alpha^2+\beta^2=(\alpha+\beta)^2-2\alpha\beta=(-2)^2-2\cdot3=\underline{-2}$

(4)　$P(x)=x^3-4x^2+x+6$ とすると

(ア)　$P(-2)=(-2)^3-4\cdot(-2)^2-2+6=-20$

(イ)　$P(-1)=(-1)^3-4\cdot(-1)^2-1+6=0$

(ウ)　$P(1)=1^3-4\cdot1^2+1+6=4$

(エ)　$P(2)=2^3-4\cdot2^2+2+6=0$

よって，$P(x)$ の因数であるものは　(イ) と (エ)

(5)　$P(x)=x^3-2x^2-11x+12$　とすると

$P(1)=1^3-2\cdot1^2-11\cdot1+12=0$

よって，$P(x)$ は $x-1$ を因数にもち

$P(x)=(x-1)(x^2-x-12)=(x-1)(x-4)(x+3)$

$P(x)=0$ から　$\underline{\underline{x=1,4,-3}}$

[α−2]　図形と方程式

(1)　$\mathrm{AB}=\sqrt{(4-2)^2+\{-2-(-6)\}^2}=\sqrt{2^2+4^2}=\sqrt{20}=\underline{\underline{2\sqrt{5}}}$

(2)　点 Q の座標を $(x,\ y)$ とする。

線分 PQ の中点が A であるから

$\dfrac{2+x}{2}=-5$，$\dfrac{-3+y}{2}=1$

これを解くと　$x=-12$，$y=5$　よって，$\underline{\underline{\mathrm{Q}(-12,\ 5)}}$

(3)　直線 $x-y+2=0$ の傾きは 1 だから，垂直な直線の傾きは -1　よって，$y+1=-(x-3)$　すなわち $\underline{\underline{x+y-2=0}}$

(4)　方程式を変形すると　$(x^2+4x)+(y^2-2y)=4$

すなわち　$(x+2)^2-2^2+(y-1)^2-1^2=4$

よって　$(x+2)^2+(y-1)^2=3^2$

ゆえに，中心 $(-2,\ 1)$，半径 3

(5)　$-1\cdot x+\sqrt{3}\,y=4$　すなわち　$\underline{\underline{-x+\sqrt{3}\,y=4}}$

[α−3]　指数関数と対数関数

(1)　$5^2\div5^{-3}\times5^{-4}=5^{2-(-3)-4}=5^1=\underline{5}$

(2)　$\sqrt[3]{9}=\sqrt[3]{3^2}=3^{\frac{2}{3}}$，　$\sqrt[4]{27}=\sqrt[4]{3^3}=3^{\frac{3}{4}}$，　$\sqrt{3}=3^{\frac{1}{2}}$

底 3 は 1 より大きく，$\dfrac{1}{2}<\dfrac{2}{3}<\dfrac{3}{4}$ であるから

$3^{\frac{1}{2}}<3^{\frac{2}{3}}<3^{\frac{3}{4}}$　すなわち　$\underline{\underline{\sqrt{3}<\sqrt[3]{9}<\sqrt[4]{27}}}$

(3)　$1=\log_{\frac{1}{2}}a$ であるから $a=\dfrac{1}{2}$，$0=\log_{\frac{1}{2}}b$ であるから $b=1$

$c=\log_{\frac{1}{2}}2$ であるから $c=-1$　よって $\underline{\underline{a=\dfrac{1}{2},\ b=1,\ c=-1}}$

(4)　$(\text{与式})=\log_{10}\left(\dfrac{50}{3}\times60\right)=\log_{10}1000=\log_{10}10^3=\underline{3}$

(5)　真数は正であるから　$x>0$ かつ $x+3>0$　より $x>0\cdots$①

方程式を変形すると　$\log_2 x(x+3)=2$

よって　$x(x+3)=2^2$　式を整理すると　$x^2+3x-4=0$

すなわち　$(x-4)(x+1)=0$　①から　$\underline{\underline{x=4}}$

[α−4]　三角関数

(1)　$\dfrac{\pi}{180}\times495=\underline{\underline{\dfrac{11}{4}\pi}}$

(2)　$\dfrac{1}{2}\cdot2^2\cdot\dfrac{\pi}{4}=\underline{\underline{\dfrac{\pi}{2}}}$

(3)　$-1\leqq\sin\theta\leqq1$ であるから　$-3-1\leqq3\sin\theta-1\leqq3-1$

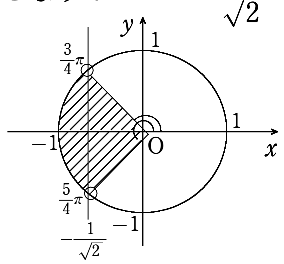
よって　$3\sin\theta-1\leqq2$　ゆえに，$3\sin\theta-1$ の最大値は $\underline{2}$

(4)　不等式を変形すると $\cos\theta<-\dfrac{1}{\sqrt{2}}$ となり $\cos\theta=-\dfrac{1}{\sqrt{2}}$

となる θ は $0\leqq\theta<2\pi$ の範囲で

$\theta=\dfrac{3}{4}\pi,\ \dfrac{5}{4}\pi$　であるから

右の図から　$\underline{\underline{\dfrac{3}{4}\pi<\theta<\dfrac{5}{4}\pi}}$



(5)　$\cos75^\circ=\cos(45^\circ+30^\circ)=\cos45^\circ\cos30^\circ-\sin45^\circ\sin30^\circ$

$=\dfrac{1}{\sqrt{2}}\cdot\dfrac{\sqrt{3}}{2}-\dfrac{1}{\sqrt{2}}\cdot\dfrac{1}{2}=\dfrac{\sqrt{3}-1}{2\sqrt{2}}=\underline{\underline{\dfrac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}}}$

[α−5]　微分法と積分法

(1)　$y'=-(x^3)'+2(x^2)'+4x'=\underline{\underline{-3x^2+4x+4}}$

(2)　$y=6x^2+x-2$ であるから，この関数を微分すると

$y'=12x+1$

よって，$x=3$ における微分係数は $x=3$ を代入して，

$12\cdot3+1=\underline{37}$

(3)　$y'=-3x^2+2x+1=-(3x+1)(x-1)$

$y'=0$ とすると $x=-\dfrac{1}{3}$，1

y の増減表は

x	……	$-\frac{1}{3}$	……	1	……
y'	−	0	+	0	−
y	↘	極小 $-\frac{5}{27}$	↗	極大 1	↘

ゆえに，$\underline{\underline{x=1\ \text{で極大値}\ 1,\ x=-\dfrac{1}{3}\ \text{で極小値}\ -\dfrac{5}{27}}}$

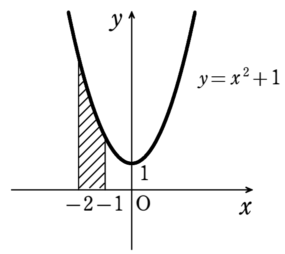
(4)　$(\text{与式})=9\displaystyle\int x^2dx-8\int xdx+3\int dx$

$=9\cdot\dfrac{x^3}{3}-8\cdot\dfrac{x^2}{2}+3x+C=\underline{\underline{3x^3-4x^2+3x+C}}$

(5)　与えられた放物線は，図のように x 軸の上側にあるから

$S=\displaystyle\int_{-2}^{-1}(x^2+1)dx=\left[\dfrac{x^3}{3}+x\right]_{-2}^{-1}$

$=\left(-\dfrac{4}{3}\right)-\left(-\dfrac{14}{3}\right)=\underline{\underline{\dfrac{10}{3}}}$



［α−6］　ベクトル

(1)　$|\vec{a}|=\sqrt{3^2+(-2)^2}=\underline{\underline{\sqrt{13}}}$

(2)　$x\vec{a}+y\vec{b}=x(2,3)+y(-1,2)=(2x-y,3x+2y)$
であるから，$(-6,5)=(2x-y,3x+2y)$
よって，$2x-y=-6$，$3x+2y=5$
これを解くと，$\underline{\underline{x=-1,\ y=4}}$

(3)　$\vec{a}\cdot\vec{b}=0$ より $-3x^2+12=0$
これを解くと，$\underline{\underline{x=2,\ -2}}$

(4)　$\vec{a}\vec{b}=|\vec{a}||\vec{b}|\cos120^\circ=1\times2\times\left(-\frac{1}{2}\right)=\underline{\underline{-1}}$

(5)　$|\vec{a}+\vec{b}|^2=(\vec{a}+\vec{b})\cdot(\vec{a}+\vec{b})=|\vec{a}|^2+2\vec{a}\cdot\vec{b}+|\vec{b}|^2$
$=3^2+2\vec{a}\cdot\vec{b}+2^2=2\vec{a}\cdot\vec{b}+13$
$|\vec{a}+\vec{b}|=5$ より，$|\vec{a}+\vec{b}|^2=25$
よって，$2\vec{a}\cdot\vec{b}+13=25$
したがって，$\vec{a}\cdot\vec{b}=\underline{\underline{6}}$

［α−7］　数列

(1)　初項をa，公差をdとすると，　$a_n=a+(n-1)d$
初項が−5，第７項が37であるから，$a_7=(-5)+(7-1)d$
よって，$37=(-5)+6d$　これを解いて，$d=7$
ゆえに，$a_n=(-5)+(n-1)\times7=7n-12$
すなわち，$\underline{\underline{a_n=7n-12}}$

(2)　初項a，公比rの等比数列の和 S_n は，$S_n=\dfrac{a(r^n-1)}{r-1}$
$S_n=\dfrac{2(3^n-1)}{3-1}=242$　　$3^n-1=242$　　$3^n=243$
これを解くと，$\underline{\underline{n=5}}$

(3)　等比数列の性質から，$x^2=\sqrt{5}\times2\sqrt{5}$　が成り立つ
よって，$\underline{\underline{x=\sqrt{10},-\sqrt{10}}}$

(4)　(与式)$=4\sum_{k=1}^{20}k+\sum_{k=1}^{20}1=4\times\frac{1}{2}\cdot20\cdot21+20=\underline{\underline{860}}$

(5)　数列$\{a_n\}$は，初項５，公比−2 の等比数列である。
よって，一般項は，$\underline{\underline{a_n=5\times(-2)^{n-1}}}$