［β－共通問題］

(1)　$a^4-1=(a^2+1)(a^2-1)=\underline{(a^2+1)(a+1)(a-1)}$

(2)　$x=\dfrac{2}{\sqrt{3}+1}=\dfrac{2}{\sqrt{3}+1}\times\dfrac{\sqrt{3}-1}{\sqrt{3}-1}=\dfrac{2(\sqrt{3}-1)}{2}=\sqrt{3}-1$

$y=\dfrac{2}{\sqrt{3}-1}=\dfrac{2}{\sqrt{3}-1}\times\dfrac{\sqrt{3}+1}{\sqrt{3}+1}=\dfrac{2(\sqrt{3}+1)}{2}=\sqrt{3}+1$

より，(与式)$=\dfrac{(\sqrt{3}+1)+(\sqrt{3}-1)}{(\sqrt{3}+1)(\sqrt{3}-1)}=\dfrac{2\sqrt{3}}{3-1}=\underline{\sqrt{3}}$

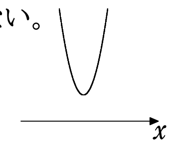
(3)　放物線 $y=x^2+x+1$ を x 軸方向に２，y 軸方向に－２だけ平行移動すると，　$y-(-2)=(x-2)^2+(x-2)+1$

$y+2=(x^2-4x+4)+x-1$　　$y=x^2-3x+1$

これが放物線 $y=x^2+ax+b$ であるから，$\underline{a=-3，b=1}$

(4)　$y=x^2-2mx+m+12$ とおくと，常に $y>0$ のとき右の図より $x^2-2mx+m+12=0$ の実数解がない。

よって，判別式を D とすると $D<0$ である。



$\dfrac{D}{4}=(-m)^2-(m+12)=m^2-m-12<0$

$(m-4)(m+3)<0$　より　$\underline{-3<m<4}$

(5)　△ABC において，BC$=a\cos\theta$

また，△BCD において，CD$=$BC$\cdot\sin\theta$

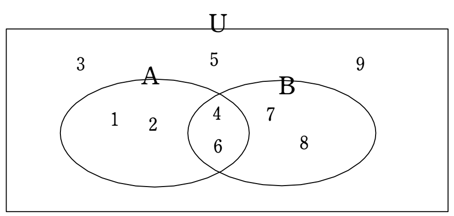
よって，CD$=\underline{a\sin\theta\cos\theta}$

(6)　$A=180°-(B+C)=180°-(105°+45°)=30°$

正弦定理により，$\dfrac{12}{\sin 45°}=\dfrac{\mathrm{BC}}{\sin 30°}$

よって，BC$=\dfrac{12\sin 30°}{\sin 45°}=12\cdot\dfrac{1}{2}\div\dfrac{1}{\sqrt{2}}=\underline{6\sqrt{2}}$

(7)　ベン図で表すと，次のようになる。



よって，$\underline{A=\{1,2,4,6\}}$

(8)　Aを小さい順に並べると，

2，5，5，┊7，10，11，┊13，13，13，┊14，14，18

Bを小さい順に並べると，

4，5，7，┊7，8，9，┊10，12，13，┊13，14，15

Aの第1四分位数は $\dfrac{5+7}{2}=6$，第3四分位数は $\dfrac{13+14}{2}=13.5$

Bの第1四分位数は $\dfrac{7+7}{2}=7$，第3四分位数は $\dfrac{13+13}{2}=13$

よって，正しいものは $\underline{②}$

(9)　平均点が６点なので，$\dfrac{6+8+5+x+y}{5}=6$

よって，$x+y=11$ ……①

分散が２なので，$\dfrac{(6-6)^2+(8-6)^2+(5-6)^2+(x-6)^2+(y-6)^2}{5}=2$

よって，$(x-6)^2+(y-6)^2=5$ ……②　　②に①を代入して

$(x-6)^2+(5-x)^2=5$　$2x^2-22x+61=5$　$x^2-11x+28=0$

$(x-4)(x-7)=0$　　$x>y$ だから，$\underline{(x，y)=(7，4)}$

(10)　正８角形の８個の頂点から２個を選んで結んだ線分から，８本の辺を除く。よって，${}_8C_2-8=\dfrac{8\cdot 7}{2\cdot 1}-8=\underline{20（本）}$

(11)　4回中，白球が１個だけ出たので，赤球は３個出ている。

よって，${}_4C_1\left(\dfrac{2}{8}\right)^1\left(\dfrac{6}{8}\right)^3=4\cdot\dfrac{3^3}{4^4}=\underline{\dfrac{27}{64}}$

(12)　方べきの定理より，AB$=x$ とおくと　AT$^2=$AB$\cdot$AC

よって，$4^2=x\cdot(x+6)$　$x^2+6x-16=0$　$(x+8)(x-2)=0$

$x=2，-8$　　$x>0$ より　$\underline{x=2}$

(13)　三平方の定理より AC$=\sqrt{13^2-12^2}=5$

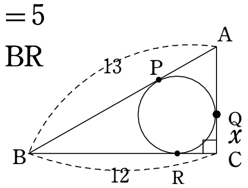
また，AP$=x$ とおくと，PB$=13-x=$BR

RC$=12-(13-x)=x-1=$CQ

QA$=5-(x-1)=6-x$

よって，AP$=$AQ　より　$x=6-x$

$x=3$　　よって，$\underline{\mathrm{AP}=3}$



(14)　$\sqrt{\dfrac{20a}{7}}=2\sqrt{\dfrac{5a}{7}}$ より，$a=5\cdot 7=\underline{35}$

(15)　ユークリッドの互除法により

$4029=442\cdot 9+51$　　$442=51\cdot 8+34$　　$51=34\cdot 1+17$

$34=17\cdot 2$　　　よって，最大公約数は 17

［β－1］　場合の数

(1)　右へ１区画進むことを a，上へ１区画進むことを b と表すとPからQまで行く道順の総数は，５個の a と７個の b を１列に並べる順列の総数に等しいから，$\dfrac{12!}{5!7!}=\underline{792（通り）}$

(2)　同様に考えて、

PからRまで行く道順の総数は　$\dfrac{5!}{3!2!}=10$（通り）

RからSまで行く道順の総数は　$\dfrac{3!}{1!2!}=3$（通り）

SからQまで行く道順の総数は　$\dfrac{4!}{3!1!}=4$（通り）

よって，RとSをともに通ってPからQまで行く道順の総数は　$10\times 3\times 4=\underline{120（通り）}$

(3)　同様に考えて、

Rを通ってPからQまで行く道順の総数は

$\dfrac{5!}{3!2!}\cdot\dfrac{7!}{4!3!}=350$（通り）

Sを通ってPからQまで行く道順の総数は

$\dfrac{8!}{4!4!}\cdot\dfrac{4!}{3!1!}=280$（通り）　3

したがって，RまたはSを通ってPからQまで行く道順の総数は

$350+280-120=510$（通り）　7

よって，RもSも通らずに，PからQまで行く道順の総数は

$792-510=282$（通り）　10

[β−2]　整数

(1)　$1\times 2^4+0\times 2^3+1\times 2^2+1\times 2+0\times 1$

$=16+0+4+2+0=\underline{\underline{22}}$

(2)　720を素因数分解すると，$720=2^4\times 3^2\times 5$

720の正の約数は，

2^4 の正の約数 1，2，2^2，2^3，2^4　の５個のうちの１つと，

3^2 の正の約数 1、3、3^2　の３個のうちの１つと，

5　の正の約数 1，5　の２個のうちの１つとの積で表される。

よって，$5\times 3\times 2=$ 30（個）

(3)　整数 n は，次のいずれかの形で表される。

$3k$，$3k+1$，$3k+2$（ただし，k は整数）

(ｉ) $n=3k$ のとき

$n^2+n+3=(3k)^2+3k+3=9k^2+3k+3=3(3k^2+k+1)$　3

(ii) $n=3k+1$ のとき

$n^2+n+3=(3k+1)^2+(3k+1)+3$

$=9k^2+9k+5=3(3k^2+3k+1)+2$　7

(iii) $n=3k+2$ のとき

$n^2+n+3=(3k+2)^2+(3k+2)+3$

$=9k^2+15k+9=3(3k^2+5k+3)$

よって，(ｉ) と (iii) の場合は余り 0，(ii) の場合は余り 2

ゆえに，n^2+n+3 を 3 で割ったときの余りは，0 または 2

である。　10

[β−3]　図形と計量

(1)　四角形ABCD は円に内接するから，$\angle ABC+\angle ADC=180^\circ$

よって，$\angle ABC=180^\circ-\angle ADC=180^\circ-110^\circ=70^\circ$

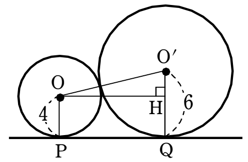
ゆえに，$\angle OBC=70^\circ-36^\circ=34^\circ$

△OBC は二等辺三角形であるから，$\angle OBC=\angle OCB$

よって，$\angle BOC=180^\circ-34^\circ\times 2=112^\circ$

円周角の定理により，$\alpha=\dfrac{1}{2}\angle BOC=\dfrac{1}{2}\times 112^\circ=\underline{56^\circ}$

(2)　直線PQ は，円O，O′ に接するから



OP⊥PQ，O′Q⊥PQ

よって，OからO′Qに下ろした垂線を

OHとすると

四角形OPQH は長方形であり、

OP＝QH＝4

ゆえに，O′H＝O′Q−QH＝6−4＝2

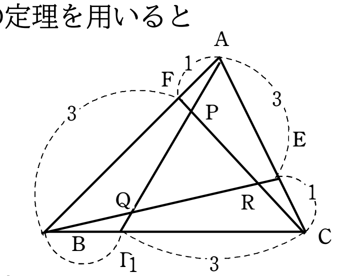
また，円O，O′ は外接しているから　OO′＝4+6＝10

直角三角形OO′H において、

$OH=\sqrt{(OO')^2-(O'H)^2}=\sqrt{10^2-2^2}=\sqrt{96}=4\sqrt{6}$

よって，$\underline{PQ=4\sqrt{6}}$

(3)　△ADCと直線BEにメネラウスの定理を用いると



$\dfrac{AQ}{QD}\cdot\dfrac{DB}{BC}\cdot\dfrac{CE}{EA}=1$

よって，$\dfrac{AQ}{QD}\cdot\dfrac{1}{4}\cdot\dfrac{1}{3}=1$

ゆえに，AQ：QD＝12：1

△ABC の面積を S とすると，

△ABQ の面積は　$S\times\dfrac{1}{4}\times\dfrac{12}{13}=\dfrac{3}{13}S$　3

同様にして，△BRCの面積は　$\dfrac{3}{13}S$

△APCの面積は　$\dfrac{3}{13}S$

したがって，△PQRの面積は　$S-\dfrac{3}{13}S\times 3=\dfrac{4}{13}S$　7

△PQR と△ABC の面積比は，$\dfrac{4}{13}S:S=4:13$　10

[β−4]　２次関数

(1)　$2x^2-5x-3>0$ より　　$(2x+1)(x-3)>0$

よって　$\underline{\underline{x<-\dfrac{1}{2},\ 3<x}}$

(2)　求める２次関数を $y=ax^2+bx+c$ とする。

グラフが３点 $(-2,\ 6)$，$(0,\ -4)$，$(4,\ 0)$ を通るから

$$\begin{cases} 4a-2b+c=6 & \cdots\cdots ① \\ c=-4 & \cdots\cdots ② \\ 16a+4b+c=0 & \cdots\cdots ③ \end{cases}$$

② を ① に代入して　　$4a-2b-4=6$

よって　　$2a-b=5$　……④

② を ③ に代入して　　$16a+4b-4=0$

よって　　$4a+b=1$　……⑤

④＋⑤ から　　$5a=5$　　　ゆえに　$a=1$

$a=1$ を ④ に代入して　　$2-b=5$　　　ゆえに　$b=-3$

よって，求める２次関数は　　$\underline{y=x^2-3x-4}$

(3)　関数の式を変形すると　$y=-2(x-a)^2+a^2+5$　$(0\leqq x\leqq 2)$

また　$x=0$ のとき　$y=-a^2+5$

$x=2$ のとき　$y=-a^2+8a-3$

$x=a$ のとき　$y=-a^2+5$

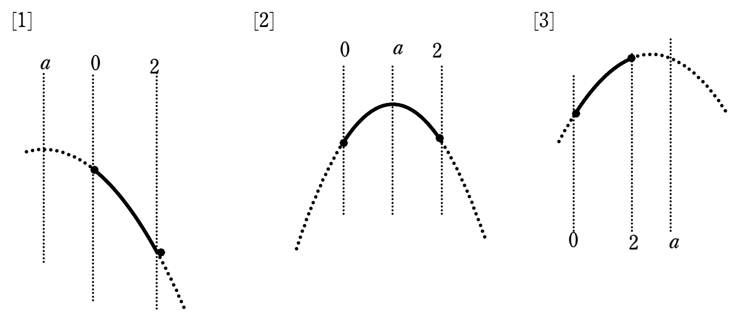
[1]　$a<0$ のとき，グラフは図の実線部分のようになる。

よって　　$x=0$ で最大値 $-a^2+5$　3

[2]　$0\leqq a<2$ のとき，グラフは図の実線部分のようになる。

よって　　$x=a$ で最大値 a^2+5　7

[3]　$2\leqq a$ のとき，グラフは図の実線部分のようになる。



$a<0$ のとき　　　$x=0$ で最大値 $-a^2+5$

$0\leqq a<2$ のとき　$x=a$ で最大値 a^2+5

$2\leqq a$ のとき　　　$x=2$ で最大値　a^2+8a-3　10

[β−5]　図形と計量

(1)　$\tan\alpha=-2$ を $1+\tan^2\alpha=\dfrac{1}{\cos^2\alpha}$ に代入すると，

$\dfrac{1}{\cos^2\alpha}=5$　すなわち　$\cos^2\alpha=\dfrac{1}{5}$

よって，$\cos\alpha=\pm\dfrac{1}{\sqrt{5}}=\pm\dfrac{\sqrt{5}}{5}$ ⋯ ①

$\tan\alpha=-2<0$ であるから，

α の範囲は $90^\circ<\alpha<180^\circ$ となり，$\cos\alpha<0$

ゆえに，① より　$\cos\alpha=-\dfrac{\sqrt{5}}{5}$

(2)　(与式)$=\{\sin 20^\circ+\sin(90^\circ-20^\circ)\}^2+\{\sin(90^\circ-20^\circ)+\cos(90^\circ+20^\circ)\}^2$

$=(\sin 20^\circ+\cos 20^\circ)^2+(\cos 20^\circ-\sin 20^\circ)^2$

$=\sin^2 20^\circ+2\sin 20^\circ\cos 20^\circ+\cos^2 20^\circ+\cos^2 20^\circ-2\cos 20^\circ\sin 20^\circ+\sin^2 20^\circ$

$=2(\sin^2 20^\circ+\cos^2 20^\circ)$

$=2$

(3)　三平方の定理より

$AB=\sqrt{2^2+3^2}=\sqrt{13}$, $AC=\sqrt{1^2+3^2}=\sqrt{10}$, $BC=\sqrt{2^2+1^2}=\sqrt{5}$

$\triangle ABC$ において，余弦定理を用いると

$\cos\theta=\dfrac{BA^2+BC^2-AC^2}{2\cdot BA\cdot BC}=\dfrac{13+5-10}{2\cdot\sqrt{13}\cdot\sqrt{5}}=\dfrac{4}{\sqrt{65}}$　3

ここで，$\sin\theta>0$ より

$\sin\theta=\sqrt{1-\cos^2\theta}=\sqrt{1-\left(\dfrac{4}{\sqrt{65}}\right)^2}=\dfrac{7}{\sqrt{65}}$　7

よって，$\triangle ABC$ の面積は，

$\dfrac{1}{2}\cdot BA\cdot BC\cdot\sin\theta=\dfrac{1}{2}\cdot\sqrt{13}\cdot\sqrt{5}\cdot\dfrac{7}{\sqrt{65}}=\dfrac{7}{2}$　10