数学学力テストＳⅠα　詳解

数　と　式

(1)　$(-x^2y)^3\times(xy^3)^2=(-1)^3(x^2)^3y^3\times x^2(y^3)^2=-x^6y^3\times x^2y^6=-x^8y^9$

(2)　$2x+y=A$ とおくと，

$(2x+y+z)(2x+y-z)=\{(2x+y)+z\}\{(2x+y)-z\}$

$=(A+z)(A-z)$

$=A^2-z^2$

$=(2x+y)^2-z^2$　　（$\because A=2x+y$）

$=4x^2+4xy+y^2-z^2$

(3)　$2x-3y=A$，$x+y=B$ とおくと，

$(2x-3y)^2-(x+y)^2=A^2-B^2$

$=(A+B)(A-B)$

$=\{(2x-3y)+(x+y)\}\{(2x-3y)-(x+y)\}$

$=(3x-2y)(x-4y)$

(4)　分母と分子にそれぞれ $2+\sqrt{3}$ をかける。

$$\frac{1}{2-\sqrt{3}}=\frac{1\times(2+\sqrt{3})}{(2-\sqrt{3})\times(2+\sqrt{3})}=\frac{2+\sqrt{3}}{2^2-\sqrt{3}^2}=\frac{2+\sqrt{3}}{4-3}=2+\sqrt{3}$$

(5)　与えられた不等式の両辺に -10 をかける。

$$-10\left(-\frac{1}{5}x+3\right)\geqq-10\left(\frac{1}{2}x-2\right)$$

整理すると

$2x-30\geqq-5x+20$

したがって　$7x\geqq50$

よって　$x\geqq\dfrac{50}{7}$

集合と命題

(1)　$A\cup B=\{1, 4, 8, 9, 12, 16, 20\}$

(2)　$A=\{3, 6, 9\}$ から $\overline{A}=\{1, 2, 4, 5, 7, 8, 10\}$

(3)　命題「$a=0\Longrightarrow a(b-2)$」は，真

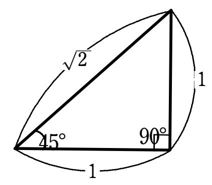
命題「$a(b-2)\Longrightarrow a=0$」は，偽

よって，必要条件であるが、十分条件ではない。　（ア）

(4)　$x<1$ または $y\geqq3$

(5)　偽　反例：$x=0$，$y=2$

図形と計量



(1)　$\sin\theta=\dfrac{1}{\sqrt{2}}$ より，$\theta=45°$

(2)　$\sin^2\theta+\cos^2\theta=1$ から

$\cos^2\theta=1-\sin^2\theta=1-\left(\dfrac{2}{5}\right)^2=\dfrac{21}{25}$

$\cos\theta<0$ であるから　$\cos\theta=-\sqrt{\dfrac{21}{25}}=-\dfrac{\sqrt{21}}{5}$

(3)　正弦定理より　$\dfrac{\sqrt{6}}{\sin120°}=2R$　よって　$R=\sqrt{2}$

(4)　$S=\dfrac{1}{2}\cdot3\sqrt{2}\cdot6\cdot\sin135°=9\sqrt{2}\cdot\dfrac{1}{\sqrt{2}}=9$

(5)　$\angle\mathrm{BAC}=180°-(70°+50°)=60°$

余弦定理より　$\mathrm{BC}^2=5^2+8^2-2\cdot5\cdot8\cos60°=25+64-80\cdot\dfrac{1}{2}=49$

$BC>0$ より　$BC=\sqrt{49}=7$

2次関数

(1)　頂点 (p,q) をもつ２次関数の一般式 $y=a(x-p)^2+q$ について

移動元になる２次関数は $y=3x^2$ なので

求める２次関数は $y=3(x-p)^2+q$

このとき、頂点が $(5,-3)$

よって，$y=3(x-5)^2-3$

(2)　解の公式に $a=2, b=-7, c=4$ を代入すると

$$x=\frac{-(-7)\pm\sqrt{(-7)^2-4\cdot2\cdot4}}{2\cdot2}=\frac{7\pm\sqrt{49-32}}{4}=\frac{7\pm\sqrt{17}}{4}$$

(3)　$y=2x^2-8x+7$

$=2(x^2-4x)+7$

$=2\{(x-2)^2-2^2\}+7$

$=2(x-2)^2-8+7$

$=2(x-2)^2-1$

また，$x=0$　のとき $y=7$，

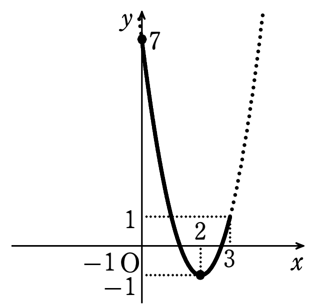
$x=3$　のとき $y=1$　であるから，

この関数のグラフは右の図の実線部分になる。

よって，y は $x=0$　で最大値 7，

$x=2$　で最小値 -1

をとる。



(4)　２次方程式 $3x^2-6x+k=0$ の判別式を D とすると

$D=(-6)^2-4\cdot3k=36-12k$

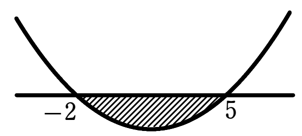
このグラフが x 軸と共有点をもつための条件は $D\geqq0$ が成り立つことであるから

$36-12k\geqq0$　これを解いて　$k\leqq3$

(5)　$x^2-3x-10=0$ を解くと　$(x+2)(x-5)=0$　よって　$x=-2$，5

したがって，この２次不等式の解は

$-2\leqq x\leqq5$



データの分析

(1)　$\dfrac{8+7+10+4+3+9+6+1}{8}=6$（点）

(2)　データを小さい順に並べると　165 167 172 174 176 181

中央値 $=\dfrac{172+174}{2}=173$（ｃｍ）

(3)　平均値 $=\dfrac{4+6+6+7+9+10}{6}=7$（点）

標準偏差 $=\sqrt{\dfrac{1}{6}\{(7-4)^2+(7-6)^2+(7-6)^2+(7-7)^2+(7-9)^2+(7-10)^2\}}$

$=\sqrt{\dfrac{24}{6}}=\sqrt{4}=2$（点）

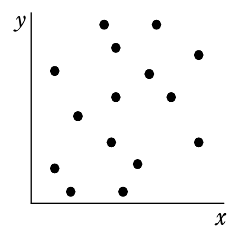
(4)　データを小さい順に並べると　1 2 3 5 6 8 9 より

第2四分位数 Q_2 は 5（中央値），第１四分位数 Q_1 は 2（前半部分1,2,3 の中央値），

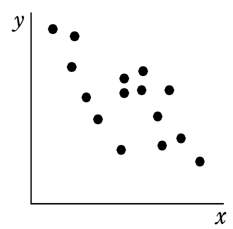
第3四分位数 Q_3 は 8（後半部分の6,8,9 の中央値）

よって，四分位偏差は　$\dfrac{8-2}{2}=3$

(5)　相関係数は，０以上１以下であり，問題の散布図は，（エ）の0,94（強い正の相関）



相関係数が 0.25 の散布図
（弱い正の相関）



相関係数が -0.72 の散布図
（強い負の相関）

場合の数と確率

⑴ 101, 103, 110, 113, 130, 131, 133, 301, 303, 310, 311, 313, 330, 331 の14通り

⑵ 同じ文字はないので　異なる5文字の並べ方なので　$5!=5\cdot4\cdot3\cdot2\cdot1=120$ 通り

⑶ 大小２個のさいころの目の出方は　6^2 通り＝36通り

目の和が４の倍数になるのは次の表のとおり

	1	2	3	4	5	6
1			○			
2		○				○
3	○				○	
4				○		
5			○			
6		○				○

よって　$\dfrac{9}{36}=\dfrac{1}{4}$

⑷ 全部の 10 本から 3 本引く組合せは　${}_{10}C_3$ 通り

このとき「少なくとも 1 本が当たる」という事象は，「３本ともはずれる」という事象の余事象を考えれば良い。

「３本ともはずれる」という事象は、

はずれくじ 6 本から 3 本引く組合せを求めれば良いので、${}_6C_3$ 通り

よって、求める確率は　$\dfrac{{}_6C_3}{{}_{10}C_3}=\dfrac{6\cdot5\cdot4}{3\cdot2\cdot1}\times\dfrac{3\cdot2\cdot1}{10\cdot9\cdot8}=\dfrac{1}{6}$

余事象の確率 $P(\overline{A})=1-P(A)$ は　$1-\dfrac{1}{6}=\dfrac{5}{6}$

⑸ A の袋から球を取り出す試行と，B の袋から球を取り出す試行は独立である。

同じ色の球が出るのは次の [1] か [2] のどちらかで，これらは互いに排反である。

[1]　A･Bからともに赤球が出る場合　　その確率は　$\dfrac{4}{6}\times\dfrac{4}{8}=\dfrac{1}{3}$

[2]　A･Bからともに白球が出る場合　　その確率は　$\dfrac{2}{6}\times\dfrac{4}{8}=\dfrac{1}{6}$

よって，求める確率は　$\dfrac{1}{3}+\dfrac{1}{6}=\dfrac{3}{6}=\dfrac{1}{2}$

整数の性質

⑴ $589=133\cdot4+57$

$133=57\cdot2+19$

$57=19\cdot3+0$

よって最大公約数19

⑵ $2940=2^2\cdot3\cdot5\cdot7^2$

よって，2940の約数の個数は

$(2+1)(1+1)(1+1)(2+1)=3\cdot2\cdot2\cdot3=36$

⑶ $x=6.\dot{3}$ とおくと

$$\begin{array}{rl} 10x &= 63.3333\cdots \\ -)\quad x &= 6.3333\cdots \\ \hline 9x &= 57 \end{array}$$

よって　$x=\dfrac{57}{9}=\dfrac{19}{3}$

⑷ 最も小さい立方体の1辺の長さは，9，12，4の最小公倍数である。

$9=3^2$

$12=2^2\cdot3$

$4=2^2$

よって，求める1辺の長さは　$2^2\cdot3^2=36$ (cm)

⑸ 条件から a , b は次のように表すことができる。

$a=11k+3$，$b=11l+6$　（ k , l は0以上の整数)

$2a+3b=2(11k+3)+3(11l+6)$

$=2\cdot11k+6+3\cdot11l+18$

$=11(2k+3l+2)+2$

よって，$2a+3b$ を 11 で割ったときの余りは2である。

図形の性質

⑴ 線分BDは円Oの直径であるから　BAD＝90°

よって　∠CAD＝90°−76°＝14°

円周角の定理より，∠CBD＝∠CAD

したがって，　∠CBD＝14°

⑵ BE＝BD であるから，BD＝3

AD＝AB−BD であることから　AD＝5−3＝2

AF＝AD であるから，AF＝2

⑶ 円周角の定理より　∠ABC＝$\dfrac{1}{2}$∠AOC

よって，　∠ABC＝86°

四角形ABCDは円Oに内接するから　∠ABC＋∠ADC＝180°

すなわち　∠ADC＝180°−∠ABC

したがって　∠ADC＝94°

⑷ メネラウスの定理より，$\dfrac{BE}{EC}\cdot\dfrac{CF}{FA}\cdot\dfrac{AD}{DB}=1$ …①

BC＝ x とおくと，BE＝ $x+4$ であるから

①より　$\dfrac{x+4}{4}\cdot\dfrac{3}{4}\cdot\dfrac{2}{5}=1$　　整理すると　$3(x+4)=40$

これを解いて　$x=\dfrac{28}{3}$　　したがって，BC＝$\dfrac{28}{3}$

⑸ 方べきの定理より，$PT^2=PA\cdot PB$

PA＝7，PB＝3であるから，$PT^2=21$　PT≧0 であるから　PT＝$\sqrt{21}$