♦図形関係の分野での連携♦

平面幾何，図形と方程式，ベクトル（平面・空間）を絡めて $\cdots\cdots$

I 「図形と方程式」で注意していること（平面幾何と絡めて）

$\boxed{1}$ 次の直線の方程式を求めよ.

(1) 点 $(3, 1)$ を通り傾き 2 がの直線.

(2) 点 $(-4, 2)$ を通り，円 $x^2 + y^2 = 4$ に接する直線.

(3) 点 $(-1, 3)$ を通り，円 $x^2 + y^2 = 5$ に接する直線.

II　「ベクトル」導入時に注意していること（図形と方程式で張っておく伏線など）

$\boxed{2}$　定点 O と △ABC の内部の点 P について，

$$\overrightarrow{\mathrm{OP}} = \frac{1}{9}\left(2\overrightarrow{\mathrm{OA}} + 3\overrightarrow{\mathrm{OB}} + 4\overrightarrow{\mathrm{OC}}\right)$$

が成り立つとき，点 P はどのような点かを述べよ．また，△PBC，△PCA，△PAB の面積比を求めよ．

$\boxed{3}$　次の公式を証明せよ．

(1)　2 直線 $ax + by + c = 0$ と $a'x + b'y + c' = 0$ との平行条件と垂直条件は，それぞれ，$ab' - a'b = 0$，$aa' + bb' = 0$ である．

(2)　円 $x^2 + y^2 = r^2$ の周上の点 (x_0, y_0) における接線は，$x_0x + y_0y = r^2$ である．

(3)　点 (x_0, y_0) から直線 $ax + by + c = 0$ へ下した垂線の足の長さ d は，

$$d = \frac{|ax_0 + by_0 + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}}$$

で与えられる．

III　「ベクトル」の特性を身に付けさせる

$\boxed{4}$ (i)　平面上のベクトル $\overrightarrow{x}, \overrightarrow{y}$ に対して，$\left|\overrightarrow{x}\right| = \left|\overrightarrow{y}\right|$ であるための必要十分条件は，内積 $(\overrightarrow{x} + \overrightarrow{y}) \cdot (\overrightarrow{x} - \overrightarrow{y})$ が 0 であることを証明せよ．

(ii)　円において，半円の弧に対する円周角は直角であることを (1) の結果を利用して証明せよ．

（佐賀大）

$\boxed{5}$ 空間内の 4 点 $\mathrm{O}(0,0,0)$, $\mathrm{A}(0,1.-1)$, $\mathrm{P}(-2t,0,0)$, $\mathrm{Q}(t,t+1,t-1)$　$(t \neq 0)$ を考える．3 点 O，P，Q を通る平面が 3 点 A，P，Q を通る平面に垂直になるように t を定めよ．

（東北大・文系）

$\boxed{6}$ 点 O を基点として 2 定点 A，B の位置ベクトルが $\overrightarrow{a}$，$\overrightarrow{b}$，動点 P の位置ベクトルが $\overrightarrow{p}$ で与えられているとき，次のベクトル方程式で表される点 P の軌跡はどのような図形となるかを答えよ．

(1)　$\left|\overrightarrow{p} - \overrightarrow{a}\right| = 2$

(2)　$\overrightarrow{p} = \overrightarrow{b} + t\,\overrightarrow{a}$　$(t \in \mathbb{R})$

(3)　$(\overrightarrow{p} - \overrightarrow{a}) \cdot \overrightarrow{b} = 0$

(4)　$(\overrightarrow{p} - \overrightarrow{a}) \cdot (\overrightarrow{p} - \overrightarrow{b}) = 0$

(5)　$(\overrightarrow{p} - \overrightarrow{a}) \cdot (\overrightarrow{b} - \overrightarrow{a}) = 0$

(6)　$\overrightarrow{p} \cdot (\overrightarrow{p} - \overrightarrow{b}) = 0$

$\boxed{7}$ a, b, c を 0 でない実数として，空間内に 3 点 OA$(\,a, 0, 0\,)$, B$(\,0, b, 0\,)$, C$(\,0, 0, c\,)$ $(t \neq 0)$ をとる．

(1) 空間内の点 P が $\overrightarrow{\mathrm{AB}} \cdot \left(\overrightarrow{\mathrm{BP}} + 2\overrightarrow{\mathrm{CP}}\right) = 0$ を満たしながら動くとき，この点 P はある定点 Q から一定の距離にあることを示せ．

(2) (1) における定点 Q は 3 点 A，B，C を通る平面上にあることを示せ．

(3) (1) における P について，四面体 ABCP の体積の最大値を求めよ．

IV　場合によっては「ベクトル」も幾何で$\cdots\cdots$

$\boxed{8}$　一辺の長さが1の正四面体OABCにおいて，辺OAを1：2に内分する点をL，辺OBを2：1に内分する点をMとし，辺BC上に$\angle$LMNが直角となるように点Nをとる．このとき，次の問いに答えよ．

(i)　BN$:$NCを求めよ．

(ii)　$\angle$MNB$=\theta$とするとき，$\cos\theta$の値を求めよ．

$\boxed{9}$　1辺の長さが1の立方体ABCD$-$EFGHにおいて，$\overrightarrow{\mathrm{AB}}$を$\overrightarrow{b}$，$\overrightarrow{\mathrm{AE}}$を$\overrightarrow{e}$，$\overrightarrow{\mathrm{AD}}$を$\overrightarrow{d}$とおく．また，線分DF上に1点Pを，DF$\perp$APとなるようにとる．さらに，直線APと平面CDHGの交点をRとする．

(1)　$\overrightarrow{\mathrm{AP}}$を$\overrightarrow{b}, \overrightarrow{d}, \overrightarrow{e}$を用いて表せ．

(2)　点Rは平面CDHG上のどのような位置にあるかを述べよ．

(3)　直線APが平面CDHGの法線ベクトルとなす角をθ（鋭角）とするとき，$\cos\theta$の値を求めよ．

♦ちょっと e 話♦

「e」の導入って難しくありません？

生徒にとって，いきなり，

$$e = \lim_{n \to 0} (1+n)^{\frac{1}{n}}$$

と見せられてもピンと来ない方が普通です $\cdots\cdots$

かつては，何社かの教科書が

「指数関数　$y = a^x$ $(a > 1)$ のうち，点 $(0, 1)$ における接線の傾きが 1 となるような底 a を e と定める」

と定義していました．具体的に”e” を定義する式が定まっていないことが，このタイプの教科書が減った理由かとも思いますが，初めて習う生徒には断然この方がわかり易いようです．

最近の教科書の定義とのやり取りは次のプリントを見てください．この部分は入試でも問われることが多いようです．

高3　微分・積分プリント　No.1

(　)組(　)番(　)

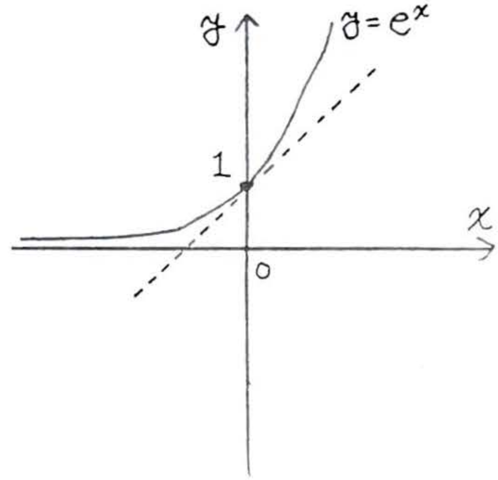
◎ e にまつわる極限の話

授業では，"e" というものは「指数関数 $y=a^x$ の中で，特に $x=0$ における微分係数が 1 となるような a を "e" と定める」ことにした。

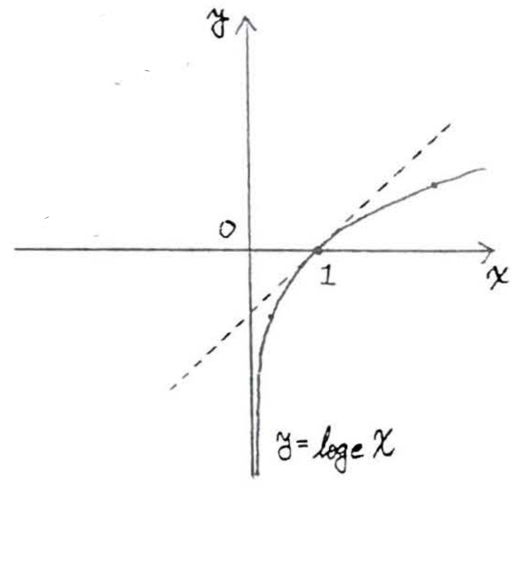
これを式で表わせば，

$$1 = \boxed{\qquad\qquad\qquad} \quad \cdots ①$$

ということだ。



これを表わしたのが右上の図で，このグラフを $y=x$ で折り返せば $y=\log_e x$ のグラフとなる。(右下図参照)



つまり，$y=\log_e x$ のグラフの $x=1$ における微分係数が

* $\boxed{\quad}$ となっている訳だ。

これを式に表わせば，

$$^{*}\boxed{\quad} = \boxed{\qquad\qquad\qquad} \quad \cdots ②$$

ということだ。

$\log$ の中に分母を入れてしまえば…

$$^{*}\boxed{\quad} = \lim_{\to 0}\left(\log_e \boxed{\qquad\qquad\qquad}\right)$$

$\log$ を使わずに書けば…

$$e = \lim_{\to 0} \boxed{\qquad\qquad\qquad} \quad \cdots ③$$

少し細工をして，極限を $\to 0$ から $\to \infty$ に直すと…

$$e = \lim_{h \to \infty} \boxed{\qquad\qquad\qquad} \quad \cdots ④$$

が出来上がる．多くの教科書は，この④の形で"e"の定義としている．このように④でeを定義した場合④の形から☆の形へと変形ができる筈だ!! これは極限計算の良い練習となるので是非やっておこう!

④⇒③

これを当たり前と思ってはいけない．$h \to \pm\infty$ なら当たり前だが，$h \to -\infty$ でも e にならなければ③は出てこない．

$h \to -\infty$ でも大丈夫なことを示そう．

$\displaystyle\lim_{h \to -\infty}\left(1+\frac{1}{h}\right)^h$ において，$h = -y$ とおくと …

高３　微分・積分プリント　　No.2

（　　）組（　　）番（　　　　　　　　　　）

③ ⇒ ②

これは簡単だ．まともにやればよし．

$$\lim_{h\to 0}\frac{\log_e(1+h)}{h} = \lim_{h\to 0}\boxed{\qquad\qquad\qquad}$$

$$= \log_e\left(\lim_{h\to 0}\boxed{\qquad\qquad\qquad}\right)$$

$$= \log_e\boxed{\qquad}$$

$$= \boxed{\qquad}$$

② ⇒ ①

これも，アッと驚く妙手を使う．

$\displaystyle\lim_{h\to 0}\frac{e^h-1}{h}$ において　$h=\log_e(y+1)$　$(y+1=e^{x})$

とおくと…

問　次の極限値を求めよ.

(1) $\lim_{x \to \infty} \left(1+\frac{2}{x}\right)^x$

(2) $\lim_{x \to \infty} \left(1-\frac{3}{x}\right)^x$

(3) $\lim_{x \to -\infty} \left(1+\frac{1}{2x}\right)^x$

(4) $\lim_{x \to \infty} \left(1-\frac{1}{x+1}\right)^x$

(5) $\lim_{x \to 0} \frac{\log_a(1+x)}{x}$

(6) $\lim_{x \to 0} \frac{\ln(1-2x)}{x}$

(7) $\lim_{x \to 0} \frac{\ln(1+3x^2)}{x^2}$

(8) $\lim_{x \to 0} \frac{e^{2x}-1}{x}$

(9) $\lim_{x \to 0} \frac{e^{-x}-1}{x}$

(10) $\lim_{x \to 0} \frac{(\sqrt{e})^x-1}{x}$